۲۸
۳
۵۱۲۰۰۷ الف
۷۵۲ ت

سازمان کتابخانه ها، موزه ها و مرکز اسناد آستان قدس رضوی
اداره مخطوطات

نام کتاب: اصول علم جبر و مقابله مقدماتی - جلد سوم
مؤلف: محمد وحید تنکابنی
موضوع: ریاضیات — زبان: فارسی
سال چاپ: ۱۳۱۴ ش - ۱۳۵۴ ق — محل چاپ: تهران
شماره عمومی: ۲۸۳۹۱ — کتابخانه / بخش
وقفی / ~~خریداری~~: آقای صفری — تاریخ: ۱۳۸۲ ش
طول: ۱۹٫۸ — عرض: ۱۳٫۷ — شماره صفحه ها: ۱۸۴ صفحه

مصور ☐ درسي ☒ گراوري ☐ افست ☐
ملاحظات ....
سیمی

مسائل ۱۴ - ۱۵ - ۱۶ پرسیده شود
درس ۲ صفحه ۳۴

اهدائی یار صفری
به کتابخانه مرکزی آستان قدس رضوی

اصول علم جبر و مقابله تنکابنی

جلد سوم

تألیف :

میرزا محمد خان وحید تنکابنی معلم و ممتحن ریاضیات عالیه
دارالفنون

کتابخانه آستان قدس مشهد
شماره ثبت ۲۸۸۸۵۲
تاریخ مهر ۸۲

چاپ چهارم

حق طبع و تقلید محفوظ

۱۳۵۳

دیباچه

بسم الله الرحمن الرحیم

بعد الحمد و الصلوة این بندهٔ فانی محمد بن محمد صادق وحید تنکابنی پس از فراغ از طبع و نشر جلد اول و دوم جبر و مقابله مقدماتی لازم دانست برای خدمت بمعارف و تسهیل و پیشرفت کار متعلمین و محصلین جلد سوم آنرا نیز بهمان سبک مطلوب

و اسلوب مرغوب تهیه و طبع نماید اینک که بتوفیق و یاری حضرت باری بانجام و اتمام آن کامیاب گردید باکمال افتخار آنرا تقدیم اهل فضل و دانش و ارباب معرفت و بصیرت مینماید و امیدوار چنانست که این خدمت ناقابل مقبول و پسندیده آید و چون بخطائی برخورند یا نقص و عیبی در آن ملاحظه نمائید شفاهاً یا کتباً مرا واقف سازند تا آنکه در چاپهای بعد در صدد اصلاح برآیم .

طهران شهر جمادی الاولی ۱۳۴۳ (محمد وحید تنکابنی)

بسمه تبارک و تعالی

اصول علم جبر و مقابله مقدماتی

مقدمه در تکمیل مطالب راجعه بمعادلات

و مسائل درجهٔ دوم

فصل اول

روابط مابین ضرایب و ریشه‌ها و موارد استعمال آن

۱- در (نمرهٔ ۵۸ جلد دوم) دیده‌ایم که طرف اول معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ (۱) را میتوان بصورت $a\left(x-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$ نوشت و چون کسور داخل پرانتزهای فوق نمایش x' و x'' ریشه‌های معادلهٔ (۱) میباشند پس عبارت فوق را میتوان چنین نوشت

$$a(x-x')(x-x'') \quad (۲)$$

و چون عبارت (۲) معادلست با طرف اول معادله (۱) پس اتحاد ذیل را خواهیم داشت

$$ax^2+bx+c\equiv a(x-x')(x-x'')$$

و یا پس از اجرای اعمال طرف ثانی

$$ax^2+bx+c\equiv ax^2-a(x'+x'')x+ax'x''$$

و چون شرط تعادل و اتحاد دو کثیرالجمله کامل آنست که جمل متشابه آنها متساوی باشند پس از اتحاد فوق روابط ذیل نتیجه میشوند

$$c=ax'x'' \quad ، \quad b=-a(x'+x'')$$

و از آنجا $x'+x''=-\frac{b}{a}$ (۳) و $x'x''=\frac{c}{a}$ (۴)

روابط (۳) و (۴) را روابط اصلیه مابین ضرایب و ریشه‌ها گویند و ما سال قبل دیده‌ایم که این روابط در معادلهٔ درجهٔ دوم دارای خواص و اهمیت بسیار قابل ملاحظه میباشند

موارد استعمال روابط مابین ضرایب و ریشه‌ها در حل بعضی مسائل قابل تبدیل بدرجهٔ دوم

۲- چنانکه در فوق اشاره نمودیم روابط مابین ضرایب و ریشه‌ها در معادلهٔ درجهٔ دوم دارای خواص مهمه میباشد و بعلاوه ذیلاً می‌بینیم که عدهٔ زیادی از مسائل درجهٔ

دوم را میتوان بوسیلهٔ آن بطرز سهل و آسانی حل نمود

مسئله ۱ – دو عدد چنان تعیین کنید که حاصل جمعشان S و حاصل ضربشان P باشد

جواب – بر وفق روابط ما بین ضرایب و ریشه‌ها دو عدد مطلوب (در صورتیکه موجود باشند) عبارتند از ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2 - Sx + P = 0$ زیرا که حاصل جمع و حاصل ضرب ریشه‌های این معادله بترتیب مساوی حاصلجمع S و حاصل ضرب P دو عدد مطلوب میباشد

مثال – دو عدد تعیین کنید که حاصل جمعشان ۷ و حاصل ضربشان ۱۰ باشد

بموجب مسئله ۱ دو عدد مطلوب ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - 7x + 10 = 0$ میباشند ریشه‌های این معادله عبارتند از $x' = 5$ و $x'' = 2$ و بسهولت میتوان امتحان نمود که دو عدد ۵ و ۲ در فرض مسئله صدق میکنند

مسئله ۲ – تفاضل و حاصل ضرب دو عدد در دست است پس آن دو عدد کدامند

جواب – فرض میکنیم که x' و x'' دو عدد مطلوب باشند اگر تفاضل و حاصل ضربشان را به d و p بنامیم بر وفق فرض مسئله روابط ذیل حاصل میشوند

$$\begin{cases} x' - x'' = d \\ x' x'' = p \end{cases} \quad (1)$$

بجهة حل اینمعادلات مجهول معاونی مثلاً y بطریقی اختیار مینمائیم که $y = -x''$ در اینصورت معادلات دستگاه (۱) را میتوان چنین نوشت

$$\begin{cases} x' + y = d \\ -x' y = p \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x' + y = d \\ x' y = -p \end{cases} \quad (2)$$

از روی معادلات دستگاه (۲) میتوان بسهولت استنباط نمود که x' و y بر وفق مسئله (۱) عبارتند از ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - dx - p = 0$ (۳)

بعد از حل معادلهٔ (۳) برای بدست آوردن x'' برحسب آنکه تفاضل d مثبت یا منفی باشد کافی است علامت آن ریشه از معادلهٔ (۳) را تغییر داد که بحسب قدر مطلق کوچکتر یا بزرگتر است

مثلاً اگر تفاضل دو عدد ۳ و حاصل ضربشان ۱۰ باشد بدواً بر وفق آنچه که ذکر شد ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - 3x - 10 = 0$ را معین میکنیم ریشه‌های این معادله عبارتند از ۵ و ۲- و چون تفاضل ۳ دو عدد مطلوب مثبت است پس آن دو عدد ۵ و ۲ میباشند

مسئله ۳ – دو عدد چنان تعیین کنید که حاصل جمعشان مثلاً ۷ و حاصل جمع مربعاتشان مثلاً ۳۷ باشد

جواب – چون دو عدد مطلوب را به x' و x'' بنامیم معادلات ذیل را خواهیم داشت :

$\begin{cases} x' + x'' = 7 \\ x'^2 + x''^2 = 37 \end{cases}$ بجهة حل این دستگاه طرفین معادلهٔ اول را مجذور میکنیم

$x'^2 + 2x'x'' + x''^2 = 49$ وچون از این معادله ثانی دستگاه فوق را

عضو بعضو نقصان کنیم حاصل میشود $2x'x'' = 12$ ویا $x'x'' = 6$

حال بواسطهٔ معلوم بودن حاصل جمع و حاصل ضرب دو عدد مطلوب مسئله منجر بمسئله ۱

گشته وبنابراین دو عدد مطلوب ریشه های معادله $x^2 - 7x + 6 = 0$

میباشند ریشه های این معادله عبارتند از $x' = 6$ $x'' = 1$ ومیتوان بسهولت

امتحان کرد که دو عدد ۶ و ۱ بخوبی در فرض مسئله صدق میکنند

مسئله ۴ - حاصلضرب دو عدد b وتفاضل مربعاتشان

a در دست است پس آن دو عدد کدامند؟

جواب - اگر x' و x'' نمایش دو عدد مطلوب باشند بروفق فرض مسئله

دستگاه معادلات ذیل را خواهیم داشت: $\begin{cases} x'x'' = b \\ x'^2 - x''^2 = a \end{cases}$ برای حل این دستگاه

اولاً طرفین معادلهٔ اول را مربع میکنیم $x'^2 x''^2 = b^2$ (۱) ثانیاً معادلهٔ دوم را

مرتباً بصورت ذیل می‌نویسیم $(x'^2 - x''^2)^2 = (x'^2 + x''^2)^2 - 4x'^2x''^2$

ویا $a^2 = (x'^2 + x''^2)^2 - 4b^2$ وبنابراین $x'^2 + x''^2 = \pm\sqrt{a^2 + 4b^2}$

حال بروفق روابط (۱) و (۲) حاصلضرب مربعات و حاصلجمع مربعات اعداد

مطلوبه در دست است پس مانند مسئله ۱ مربعات اعداد مطلوبه را حساب میکنیم

وبعد چون از آنها جذر استخراج نمائیم خود دو عدد مطلوب حاصل میشود

مسئله ۵ - دو عدد چنان تعیین کنید که حاصل جمعشان s

وحاصل جمع مکعباتشان a^3 باشد

جواب - چون دو عدد مطلوب را به x' و x'' بنمائیم برحسب فرض مسئله معادلات

ذیل را خواهیم داشت $\begin{cases} x' + x'' = s \\ x'^3 + x''^3 = a^3 \end{cases}$ بجهة حل این دستگاه طرفین معادله

اول را مکعب مینمائیم $s^3 = x'^3 + 3x'^2x'' + 3x'x''^2 + x''^3$ وچون از اینجا معادله

ثانی دستگاه فوق را نقصان کنیم حاصل میشود $s^3 - a^3 = 3x'x''(x' + x'')$

ویا $3s\,x'x'' = s^3 - a^3$ ویا $x'x'' = \dfrac{s^3 - a^3}{3s}$

حال بروفق مسئله ۱ دو عدد مطلوب عبارتند از ریشه های معادله

$$x^2 - s\,x + \frac{s^3 - a^3}{3s} = 0 \quad (1)$$

مثلاً اگر حاصل جمع دو عدد ۷ وحاصل جمع مکعباتشان ۱۳۳ باشد معادلهٔ (۱) چنین نوشته میشود

$x^2 - 7x + \dfrac{7^3 - 133}{3 \times 7}$ ویا پس از اختصارات ممکنه

$x^2 - 7x + 10 = 0$ ریشه های این معادله عبارتند از ۵ و ۲ پس دو

عدد مطلوب ۵ و ۲ میباشند

مسئله ۶ - حاصل ضرب دو عدد b و حاصل جمع مکعباتشان a^3 در دست است پس آن دو عدد کدامند

جواب - اگر x' و x'' دو عدد مطلوب باشند بر وفق فرض مسئله دستگاه معادلات ذیل را خواهیم داشت $\begin{cases} x'x''=b \\ x'^3+x''^3=a^3 \end{cases}$ بجهة حل این دستگاه ابتدا طرفین این معادلهٔ اول را بمکعب میرسانیم $x'^3x''^3=b^3$ پس از این عمل بر وفق مسئله ۱ x'^3 و x''^3 عبارتند از ریشه‌های معادلهٔ $x^2-a^3x+b^3=0$

وچون از ریشه‌های این معادله کعب استخراج کنیم x' و x'' بدست میآید

کلیهٔ هر دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی را که بصورت $\begin{cases} xy=b \\ x^m+y^m=a^m \end{cases}$ نوشته شده باشد میتوان بسهولت بر وفق مسئله ۶ حل نمود

مسئله ۷ - دو عدد چنان تعیین کنید که حاصل جمعشان a و حاصل جمع قوهٔ چهارمشان b^4 باشد

جواب - چون مانند مسائل قبل دو عدد مطلوب را به x' و x'' بنامیم دستگاه معادلات ذیل حاصل میشود $\begin{cases} x'+x''=a \\ x'^4+x''^4=b^4 \end{cases}$ برای حل این دستگاه ابتدا معادلهٔ دوم را مرتباً بصور ذیل مینویسیم

$$x'^4+x''^4=(x'^2+x''^2)^2-2x'^2x''^2=[(x'+x'')^2-2x'x'']^2-2x'^2x''^2$$

و یا $b^4=(a^2-2x'x'')^2-2x'^2x''^2$

و یا $2x'^2x''^2-4a^2x'x''+a^4-b^4=0$ (۲)

میتوان بواسطهٔ حل معادله (۲) حاصل ضرب $x'x''$ را معین نمود و آنوقت حل مسئله راجع میشود بحل مسئله ۱ زیرا که حاصل جمع و حاصل ضرب دو عدد مطلوب معین است

مسئله ۸ - معادلهٔ درجهٔ دوّمی چنان تشکیل دهید که ریشه‌هایش مساوی باشند با ریشه‌های معادله مفروض $ax^2+bx+c=0$ (۱) باضافه مقدار معلوم h

جواب - هرگاه x' و x'' نمایش ریشه‌های معادلهٔ مفروض (۱) و y' و y'' نمایش ریشه‌های معادلهٔ مطلوب باشند بر وفق فرض مسئله روابط ذیل را خواهیم داشت

$$y'=x'+h \quad \text{و} \quad y''=x''+h$$

پس $y'+y''=x'+x''+2h=-\frac{b}{a}+2h$

$$y'y''=(x'+h)(x''+h)=x'x''+h(x'+x'')+h^2$$

و یا $y'y''=\frac{c}{a}-\frac{bh}{a}+h^2$

حال بر وفق مسئله ۱ معادلهٔ درجهٔ دوّمی که ریشه‌هایش y' و y'' یعنی $x'+h$

و $h + x$ باشند عبارتست از معادله $y^2 - (-\frac{b}{a} + 2h)y + \frac{c}{a} - \frac{bh}{a} + h^2 = 0$

و یا پس از اختصارات ممکنه

$$a y^2 + (b - 2ah) y + ah^2 - bh + c = 0 \quad (2)$$

تبصره ۱ - میتوان مقدار ثابت h را طوری انتخاب نمود که معادله (۲) بصورت مختصرتری نوشته میشود مثلاً اگر $h = \frac{b}{2a}$ باشد معادله (۲) چنین نوشته میشود $y^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$ چنانکه ملاحظه میشود این معادله شامل جمله درجه اول نیست و اگر $b^2 - 4ac \geq 0$ ریشه های آن چنین خواهند بود $y = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ حال بسهولت میتوان دید که اگر از این ریشه ها مقدار h یعنی $\frac{b}{2a}$ را نقصان کنیم ریشه های معادله مفروض (۱) بدست میآیند از اینقرار

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

تبصره ۲ - هرگاه x' و x'' ریشه های معادله $a x^2 + b x + c = 0$ (۱) باشند میتوان بر وفق مسئله ۸ معادله درجه دومی تشکیل داد که ریشه هایش Kx' و Kx'' یا $\frac{K}{x'}$ و $\frac{K}{x''}$ وغیره باشند (K نمایش عددی است دلخواه) معادلاتیکه بدینطریق تشکیل میشوند موسومند به تبدیلات معادله (۱) به Kx یا به $\frac{K}{x}$ وغیره

مسئله ۹ معادله درجه دوم $(2m-1)x^2 + (5m+1)x + (3m+1) = 0$ (۱) مفروض است مطلوب است تعیین مقدار m بطریقی که نسبت

ریشه های معادله (۱) بیکدیگر مساوی $\frac{3}{2}$ باشد یعنی $\frac{x'}{x''} = \frac{3}{2}$ (۲)

جواب - برای تعیین مقدار m ابتدا روابط اصلیهٔ ذیل را مینویسیم

$$(3) \begin{cases} x' + x'' = -\frac{5m+1}{2m-1} \\ x' x'' = \frac{3m+1}{2m-1} \end{cases}$$

حال مابین رابطه ( ) و معادلات دستگاه (۳) x' و x'' را حذف مینمائیم و بجهة این عمل معادله (۲) و معادله اول دستگاه (۳) را نسبت به x' و x'' حل میکنیم تا حاصل شود

$$\begin{cases} x' = -\frac{3(5m+1)}{5(2m-1)} \\ x'' = -\frac{2(5m+1)}{5(2m-1)} \end{cases}$$

و چون در معادله دوم دستگاه (۳) بجای x' و x'' مقادیرشانرا قرار دهیم حاصل میشود

$$\frac{3(5m+1)}{5(2m-1)} \times \frac{2(5m+1)}{5(2m-1)} = \frac{3m+1}{2m-1}$$

و یا پس از اختصارات ممکنه $85m + 31 = 0$ و بنابراین $m = -\frac{31}{85}$

و چون محض امتحان در معادله (۱) بجای m عدد $\frac{-31}{85}$ را قرار دهیم معادله $147x^2 + 70x + 8 = 0$ حاصل میشود و ریشه های این معادله عبارتند از $-\frac{2}{7}$ و $-\frac{4}{21}$ و بسهولت میتوان دید که نسبت این دو ریشه مساویست با $\frac{3}{2}$

مسئله ۱۰ - مطلوب است تعیین مقادیر m بطریقی که مابین x' و x'' ریشه های معادله $(14m-1)x^2 - 2mx + 1 = 0$ (۱) رابطهٔ ذیل محقق باشد

$$3x'x'' + x'' = 2x' \quad (2)$$

جواب - اوّلاً بروفق روابط مابین ضرایب و ریشه‌ها معادلات ذیل را مینویسیم

$$\left\{\begin{array}{l} x' + x'' = \dfrac{2m}{14m-1} \\ x'x'' = \dfrac{1}{14m-1} \end{array}\right. \quad (3)$$

حال مابین رابطهٔ (۲) و معادلات (۳) x' و x'' را حذف میکنیم و بجهة اینعمل در رابطهٔ (۲) بجای حاصلضرب $x''x'$ مساویش $\frac{1}{14m-1}$ را قرار میدهیم $2x' - x'' = \frac{3}{14m-1}$ و چون این معادله و معادله اوّل دستگاه (۳) را نسبت به x' و x'' حل کنیم چنین خواهیم داشت $x' = \frac{2m+3}{3(14m-1)}$ و $x'' = \frac{4m-3}{3(14m-1)}$ حال اگر در معادلهٔ دوّم دستگاه (۳) بجای x' و x'' مقادیرشان را قرار دهیم حاصل میشود

$$\frac{2m+3}{3(14m-1)} \times \frac{4m-3}{3(14m-1)} = \frac{1}{14m-1}$$

این معادله پس از اختصارات ممکنه چنین نوشته میشود $m^2 - 15m = 0$ ریشه‌های اینمعادله که صفر و ۱۵ میباشند هر دو در فرض مسئله صدق میکنند

امثله

۱- هرگاه x' و x'' ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشند مطلوبست تشکیل معادله که اوّلاً ریشه‌هایش $(1 - \frac{2}{x'})$ و $(1 - \frac{2}{x''})$ و ثانیاً $\frac{x'}{x''}$ و $\frac{x''}{x'}$ و ثالثاً $x' + x''$ و $x'x''$ باشند.

۲- معادله درجه دوّم $x^2 - px + 36 = 0$ مفروض است مطلوبست تعیین مقدار

مقدار p بطریقی که مابین x' و x'' ریشه‌های معادله مفروضه رابطهٔ ذیل محقق باشد $\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = \frac{5}{12}$

۳- معادله درجه دوّم $x^2 + px + q = 0$ مفروض است تعیین کنید اوّلاً بازاء چه مقداری از p و q ریشه‌های معادله مفروضه مساوی p و q میباشند ثانیاً معادلهٔ درجه دوّمی بنویسید که ریشه‌هایش مساوی مربع ریشه‌های معادلهٔ مفروض باشند ثالثاً p را مساوی ۲ اختیار نموده تعیین کنید که بازاء چه مقدار q یکی از ریشه‌های معادلهٔ مفروض مضاعف ریشهٔ دیگر است

رابعاً بفرض $p = -2$ مطلوب است تعیین مقدار q بطریقی که یکی از ریشه‌های معادلهٔ مفروض مساوی مربع ریشهٔ دیگر باشد.

۴- معادلهٔ درجه دوّم $(2m-1)x^2 + 2(1-m)x + 3m = 0$ مفروض است مطلوبست اوّلاً تعیین مقدار m بطریقی که ۱- یکی از ریشه‌های معادله مفروض باشد ثانیاً مقدار m را چنان تعیین کنید که مجموع مربعات ریشه‌های معادله مفروض مساوی ۴ باشد

۵- معادلهٔ درجه دوّم $2x^2 - (2m+1)x + m^2 - 9m + 39 = 0$ مفروض است مطلوبست تعیین مقدار m بطریقی که یکی از ریشه‌ها مساوی "

برابر ریشهٔ دیگر باشد

۶- بازاء چه مقدار q مابین ریشه‌های نه و نه معادله $x^2 - 8x + q = 0$ رابطه ذیل محقق است

۷- بازاء چه مقدار m تفاضل مربعات ریشه‌های معادله $x^2 - mx + 12 = 0$ مساوی است با هفت

۸- مطلوبست تعیین مقدار m بطریقی که یکی از ریشه‌های معادله $4x^2 - 15x + 4m^3 = 0$ مساوی مربع ریشه دیگر باشد

۹- معادلات درجه دوم $x^2 - 5x + m = 0$ (۱) و $x^2 - 7x + 2m = 0$ (۲) مفروض‌اند مطلوبست تعیین مقدار m بطریقی که یکی از ریشه‌های معادله (۲) مضاعف یکی از ریشه‌های معادله (۱) باشد

۱۰- بازاء چه مقدار m تفاضل ریشه‌های معادله $2x^2 - (m-1)x + m + 1 = 0$ مساوی است با یک

۱۱- مطلوبست تعیین مقدار m بطریقی که یکی از ریشه‌های معادلهٔ ذیل مساوی مضاعف ریشهٔ دیگر باشد $(m^2 - 5m + 3)x^2 + (3m - 1)x + 2 = 0$

۱۲- بازاء چه مقدار m ریشه‌های معادلهٔ ذیل برنسبت ۴ و ۵ خواهند بود

$$(m + 5)x^2 - (2m + 1)x + m - 3 = 0$$

۱۳- مطلوبست تعیین مقدار m بطریقی که ریشه‌های معادله $x^2 - 2x + m = 0$ در رابطه $x'^2 + x''^2 + x'x'' = 5$ صدق کنند

۱۴- معادلات درجه دوم $x^2 + px + q = 0$ و $y^2 + Py + Q = 0$ مفروض میباشند مطلوبست محاسبه P و Q از روی p و q درصورتیکه بدانیم مابین ریشه‌های معادلات مفروضه روابط ذیل محقق میباشد $y' = \frac{x'}{x'-1}$ و $y'' = \frac{x''}{x''-1}$

۱۵- مطلوبست تعیین مقدار m بطریقیکه مابین ریشه‌های معادله $2x^2 + (2m - 1)x + m - 4 = 0$ رابطه $3x' - 4x'' = 11$ محقق باشد

حیلهٔ جبری - جمیع اعداد متساوی باشند

بُرهان - فرض میکنیم که a و b نمایش دو عدد غیرمساوی باشند چون واسطهٔ عددی آنها را به c بنمائیم مرتباً چنین خواهیم داشت $a + b = 2c$ طرفین این تساوی را در $a - b$ ضرب میکنیم $(a + b)(a - b) = 2c(a - b)$ ویا $a^2 - b^2 = 2ac - 2bc$ ویا $a^2 - 2ac = b^2 - 2bc$ برطرفین این تساوی c^2 را اضافه مینمائیم $a^2 - 2ac + c^2 = b^2 - 2bc + c^2$ ویا $(a - c)^2 = (b - c)^2$ ویا $a - c = b - c$ واز آنجا $a = b$ یعنی که جمیع اعداد متساوی میباشند فهو المطلوب.

م ۲۸۸۸۵۳
ح ۲۸۳۹۱

فصل دوّم

حد ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ وقتیکه ضرایب a و b و c میل کند بسمت صفر

اولاً وقتیکه a میل کند بطرف صفر

۳ - در (فقرهٔ ۳۸ جلد دوم) دیده‌ایم که ضرایب b و c میتوانند متحداً یا بنوبت مساوی صفر شوند حال میخواهیم تحقیق کنیم که اگر ضریب a تدریجاً کوچک شده و بعبارة اخری میل کند بسمت صفر چه تغییری در ریشه‌های $x' = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ و $x'' = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ عارض میشود

واضح است که اگر a میل کند بطرف صفر مقدار $\sqrt{b^2-4ac}$ میل میکند بسمت $\sqrt{b^2}$ و یا b و بنابراین مقادیر x' و x'' چنین نوشته میشوند $x' = \frac{-b+b}{2a}$ و $x'' = \frac{-b-b}{2a}$ و حال بر حسب آنکه b مثبت یا منفی باشد x' یا x'' بصورت $\frac{0}{0}$ درآمده و ریشه دیگر بصورت $\frac{\mp 2b}{0}$ نوشته میشود یعنی وقتیکه a میل کند بسمت صفر یکی از ریشه‌ها بصورت مبهم $\frac{0}{0}$ درآمده و قدر مطلق ریشهٔ

دیگر از هر حدی تجاوز مینماید

و چون محض آسودگی خیال b را مثبت فرض کنیم ریشه x' بصورت مبهم درآمده و قدر مطلق x'' الی غیر النهایه بزرگ میشود برای رفع ابهام صورت و مخرج کسر نمایش مقدار x' را در مزدوج صورت یعنی در $(-b-\sqrt{b^2-4ac})$ ضرب مینمائیم تا حاصل شود

$$x' = \frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})(-b-\sqrt{b^2-4ac})}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})}$$

و یا پس از اختصار

$$x' = \frac{2c}{-b-\sqrt{b^2-4ac}}$$

و چون در رابطه فوق a را بسمت صفر میل دهیم حاصل میشود $x' = \frac{2c}{-b-b} = -\frac{c}{b}$

بنابراین اگر a میل کند بسمت صفر حد یکی از ریشه‌ها مساوی است با $-\frac{c}{b}$ و ریشهٔ دیگر بحسب قدر مطلق الی غیر النهایه ترقی میکند

نتیجه فوق را از روی معادله $ax^2 + bx + c = 0$ هم میتوان بدست آورد و بجهة این عمل ابتدا معادله را بصورت $bx + c = -ax^2$ مینویسیم و چون این معادله ریشه صفر قبول نمیکند پس میتوان بدون آنکه تغییری در ریشه‌هایش حاصل شود طرفین را بر x^2 قسمت نمود $\frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} = -a$ و یا $(b + \frac{c}{x}) \times \frac{1}{x} = -a$ حال اگر a میل کند بسمت صفر واضح است که حاصلضرب $\frac{1}{x} \times (b + \frac{c}{x})$ نیز میل میکند بطرف صفر و شرط لازم و کافی برای آنکه حاصل ضرب دو عامل صفر شود آنست که یکی از آن دو عامل صفر گردد بنابراین

یا $\frac{1}{x}=0$ یا $\frac{c}{x}+b=0$ واز آنجا یا $x=\infty$ یا $x=-\frac{c}{b}$

مثال - مطلوب است حد ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم

$$(a^2-b^2)x^2-(2a^2+3ab^2)x+a^2+3ab+2b^2=0$$

وقتی که a میل کند بسمت b

وقتی که a میل کند بسمت b ضریب جملهٔ درجهٔ دوم یعنی (a^2-b^2) میل میکند بسمت صفر بنابراین یکی از ریشه‌ها بدون حد ترقی کرده و ریشهٔ دیگر میل میکند بسمت $-\frac{c}{b}$ یعنی $\frac{a^2+3ab+2b^2}{2a^2+3ab-b^2}$ مقدار این کسر بازاء $a=b$ مساوی است با $\frac{3}{2}$

میتوان بوسیلهٔ حل معادله نتیجهٔ فوق را امتحان نمود از اینقرار چون معادله مفروض را حل کنیم حاصل میشود $x'=\frac{a+b}{a-b}$ $x''=\frac{a+2b}{a+b}$ مقادیر x' و x'' بازاء $a=b$ چنین نوشته میشوند

$$x'=\frac{2b}{0}=\infty \qquad x''=\frac{3b}{2b}=\frac{3}{2}$$

ثانیاً وقتیکه ضرایب a و b هردو معاً میل کنند بسمت صفر

۴- وقتی که ضرایب a و b هردو یکمرتبه میل کنند بسمت صفر دستورهای

$$x'=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{و} \quad x''=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

هردو بصورت مبهم $\frac{0}{0}$ درمیآیند برای رفع ابهام چون صورت و مخرج هریک را در مزدوج صورت ضرب کنیم و مختصر نمائیم چنین خواهیم داشت $x'=\frac{2c}{-b-\sqrt{b^2-4ac}}$ و $x''=\frac{2c}{-b+\sqrt{b^2-4ac}}$ حال میتوان بسهولت دید که اگر a و b هردو یکمرتبه میل کنند بسمت صفر مقادیر x' و x'' بصورت $\frac{2c}{0}$ درآمده یعنی که هردو ریشه بدون حد ترقی مینمایند

ازروی معادله $a\,x^2+bx+c=0$ هم میتوان نتیجهٔ فوق را بدست آورد زیرا که چون آنرا بصورت متوافق $a=-\frac{1}{x}\times(\frac{c}{x}+b)$ بنویسیم بسهولت میتوان دید که اگر a و b هردو میل کنند بطرف صفر حاصل ضرب $\frac{1}{x}\times(\frac{c}{x}+b)$ نیز میل میکند بسمت صفر و برای اینکه $\frac{1}{x}\times(\frac{c}{x}+b)$ میل کند بسمت صفر کافیست که یا $\frac{1}{x}$ میل کند بسمت صفر یعنی که x بینهایت ترقی کرده و از هرحدی تجاوز نماید و یا $\frac{c}{x}+b=0$ میل کند بسمت صفر یعنی که در اینجا نیز x الی غیر النهایه ترقی کرده و از هرحدی بگذرد

پس اگر a و b یکمرتبه میل کنند بسمت صفر ریشه‌های معادله $a\,x^2+bx+c=0$ هردو بحسب قدر مطلق الی غیر النهایه ترقی کرده و از هرحدی تجاوز مینمایند.

مثال - مطلوب است تعیین حد ریشه های معادله درجه دوم

$$(a+b)^2x^2-(3a^2+ab-2b^2)x+(2a^2-3ab+b^2)$$

وقتی که a میل کند بسمت b -

وقتی که a میل کند بسمت b - ضرایب $(a-b)^2$ و $(3a^2+ab-2b^2)$ هر دو میل میکنند بسمت صفر و بنابراین بر وفق آنچه که ذکر نمودیم هر دو ریشه معادله مفروض بحسب قدر مطلق بدون حد ترقی مینمایند میتوان بواسطه حل معادله صحت نتیجه فوق را امتحان نمود ریشه های معادله مفروضه عبارتند از $x'=\frac{a-b}{a+b}$ و $x''=\frac{2a-b}{a+b}$ حال اگر در مقادیر x' و x'' مقدار a را بسمت b میل دهیم می بینیم که هر دو ریشه معادله بصورت $\frac{m}{0}$ درآمده یعنی که هر دو ریشه الی غیر النهایه ترقی مینمایند

تبصره ۱ - هرگاه ضرایب a و b و جمله معلوم c هر سه یکمرتبه میل کند بسمت صفر معادله درجه دوم منجر بمعادله $0\times x^2+0\times x+0\equiv 0$ میگردد که بازاء هر مقدار غیر مشخص محقق میباشد

تبصره ۲ - وقتیکه ضریب a خیلی کوچک باشد دیده ایم که یکی از ریشه های معادله $ax^2+bx+c=0$ بحسب قدر مطلق بینهایت ترقی نموده و ریشه

دیگر نزدیک میشود بحدش $\frac{c}{b}$ - در چنین حالتی محاسبه ریشه ها از روی دستور $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ خیلی صعب و مشکل است زیرا که اغلب مقدار b^2-4ac مجذور کامل نیست و آنوقت خطائیکه در محاسبه و اختصار مقادیر x' و x'' حاصل میشود بقدری زیاد است که مقادیر x' و x'' که بدینطریق بدست میآیند از مقادیر حقیقی ریشه ها خیلی دور میباشند و در عملیات وقتی که مقدار ضریب a خیلی کوچک باشد و بخواهند مقادیر ریشه ها را بدقت حساب نمایند ابتدا ریشه را که حدش $\frac{c}{b}$ - است بواسطه قاعده موسوم به **قاعده تقریبات متوالیه** حساب مینمایند و بعد آنرا از حاصل جمع ریشه ها یعنی از $\frac{b}{a}$ - نقصان میکنند تا ریشه دیگر بدست آید

امثله

۱۶ - مطلوبست محاسبه حد ریشه های معادله $(m^2+m-2)x^2+(m+1)(2x-1)=0$ وقتی که m میل کند بسمت ریشه های $m^2+m-2=0$

۱۷ - حد ریشه های معادله $(a+2b)x^2-4abx+(a-b)b^2=0$ را وقتیکه b میل کند بسمت $\frac{a}{2}$ - حساب کنید

۱۸ - حد ریشه های معادله ذیل را وقتیکه m میل کند بسمت ۱ حساب کنید

$$(m^2-1)x^2+4(m-1)x+m+1=0$$

فصل سوّم

حاصل جمع قوای متشابه ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوّم

۵- اوّلاً هرگاه x' و x'' نمایش ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوّم $ax^2+bx+c=0$ (۱) باشند

مطلوبست محاسبهٔ عبارات $x'^2+x''^2$ و $x'^3+x''^3$ و $x'^4+x''^4$

و بطور کلّی $x'^m+x''^m$ بدون حلّ معادله

برای محاسبهٔ عبارات فوق همانطوریکه شرط شده نباید معادله (۱) را حلّ نموده و بعد ریشه‌ها را بقوّهٔ متشابه مفروض رسانیده و حاصل را با یکدیگر جمع نمود مثلاً برای محاسبهٔ $S_2 = x'^2+x''^2$ روابط مابین ضرایب و ریشه‌ها را وسیلهٔ محاسبه قرار داده و مرتباً بطریق ذیل عمل مینمائیم

$$S_2 = x'^2+x''^2 = (x'+x'')^2 - 2x'x'' = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a}$$

یا $$S_2 = \frac{b^2-2ac}{a^2}$$

و همچنین میتوان S_2 را از روی دو تساوی محقّق
$$\begin{cases} (2)\; ax'^2+bx'+c=0 \\ (3)\; ax''^2+bx''+c=0 \end{cases}$$
نیز بدست آورد بدین طریق که تساویهای مذکوره را با یکدیگر جمع نمود تا حاصل شود

$$aS_2+bS_1+2c=0 \quad \text{یا} \quad a(x'^2+x''^2)+b(x'+x'')+2c=0$$

و چون این رابطه را نسبت به S_2 حلّ کنیم حاصل میشود $S_2 = \frac{-b}{a}S_1 - \frac{2c}{a}$

و چون $S_1 = \frac{-b}{a}$ پس $S_2 = -\frac{b}{a}\left(-\frac{b}{a}\right) - \frac{2c}{a} = \frac{b^2-2ac}{a^2}$

برای محاسبهٔ عبارت $S_3 = x'^3+x''^3$ نیز بطریق ذیل عمل میکنیم

$$S_3 = x'^3+x''^3 = (x'+x'')^3 - 3x'^2x'' - 3x'x''^2 = (x'+x'')^3 - 3x'x''(x'+x'')$$

یا $$S_3 = \left(-\frac{b}{a}\right)^3 - 3\frac{c}{a}\left(-\frac{b}{a}\right) = \frac{3abc-b^3}{a^3}$$

و همچنین S_3 را نیز میتوان از روی روابط (۲) و (۳) بدست آورد بدین طریق که رابطهٔ (۲) را در x' و رابطهٔ (۳) را در x'' ضرب نموده و بعد دو حاصل را عضو بعضو با یکدیگر جمع نمود تا رابطهٔ ذیل بدست آید

$$aS_3 + bS_2 + cS_1 = 0 \qquad S_3 = -\frac{b}{a}S_2 - \frac{c}{a}S$$

و چون بجای S_2 و S_1 مقادیرشان را قرار دهیم حاصل میشود $S_3 = \frac{3abc-b^3}{a^3}$

برای محاسبهٔ $S_4 = x'^4+x''^4$ هم میتوان بطریق ذیل عمل نمود

$$S_4 = x'^4+x''^4 = (x'^2+x''^2)^2 - 2(x'x'')^2 = \left[(x'+x'')^2 - 2x'x''\right]^2 - 2(x'x'')^2$$

یا $$S_4 = \left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}\right)^2 - \frac{2c^2}{a^2} = \frac{b^4-4ab^2c+2a^2c^2}{a^4}$$

از روی تساویهای (۲) و (۳) نیز میتوان S_4 را حساب نمود بدین طریق که تساوی (۲) را در x'^2 و تساوی (۳) را در x''^2 ضرب نموده و بعد دو حاصل را با یکدیگر جمع نمود تا تساوی ذیل نتیجه شود.

$S_4 = -\frac{b}{a} S_3 - \frac{c}{a} S_2$ ویا $a S_4 + b S_3 + c S_2 = 0$

وچون بجای S_2 و S_3 مقادیرشانرا قرار دهیم حاصل میشود $S_4 = \frac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{a^4}$

بطور کلی وقتیکه S_{m-2} و S_{m-1} دردست باشند میتوان عبارت $x'^m + x''^m = S_m$ را حساب نمود بدین طریق که رابطهٔ (۲) را در x'^{m-2} و رابطهٔ (۳) را در x''^{m-2} ضرب کرده و دو حاصل را با یکدیگر جمع نمود تا حاصل شود $a S_m + b S_{m-1} + c S_{m-2} = 0$ و بنابراین $S_m = -\frac{b}{a} S_{m-1} - \frac{c}{a} S_{m-2}$ و بدیهی است که اگر بجای S_{m-1} و S_{m-2} مقادیرشان را قرار دهیم مقدار S_m بدست میآید و مخصوصاً باید در نظر داشت که مقدار S_m بطور منطق از روی ضرایب معادله درجه دوم بدست میآید

ثانیاً - هرگاه x' و x'' نمایش ریشه های معادله درجه دوم $a x^2 + b x + c = 0$ باشند مطلوبست محاسبهٔ عبارات $\frac{1}{x'^2} + \frac{1}{x''^2}$ و $\frac{1}{x'^3} + \frac{1}{x''^3}$ وبطور کلی $\frac{1}{x'^m} + \frac{1}{x''^m}$ بدون حل معادله

چون عبارت $\frac{1}{x'^m} + \frac{1}{x''^m}$ را به S_{-m} بنمائیم چنین خواهیم داشت

$$S_{-m} = \frac{1}{x'^m} + \frac{1}{x''^m} = \frac{x'^m + x''^m}{x'^m \times x''^m} = \frac{S_m}{(\frac{c}{a})^m} = \frac{a^m}{c^m} S_m$$

حال اگر در دستور کلی $S_{-m} = \frac{a^m}{c^m} S_m$ بجای m مرتباً ۲ و ۳ و ۴ و ... را قرار دهیم دستورهای عبارات فوق بدست میآیند

مثلاً بازاء $m = 2$ حاصل میشود $S_{-2} = \frac{a^2}{c^2}$ S_2 و چون بجای S_2 مقدارش را قرار دهیم حاصل میشود : $S_{-2} = \frac{b^2 - 2ac}{c^2}$

وهمچنین $S_{-3} = \frac{a^3}{c^3} S_3$ وچون $S_3 = \frac{3abc - b^3}{a^3}$

پس $S_{-3} = \frac{3abc - b^3}{c^3}$

وچون بدقت در دستورهای S_{-2} و S_{-3} نظر کنیم می بینیم که از دستورهای S_2 و S_3 نتیجه شده اند بدین طریق که در دستورهای S_2 و S_3 ضریب a را به c و c را به a مبدل نموده اند ولبطور کلی اگر در دستور S_m بجای a حرف c و بجای c حرف a را قرار دهیم دستور S_{-m} نتیجه میشود و بالعکس اگر در دستور S_{-m} حرف a را مبدل به c و c را مبدل به a بنمائیم دستور S_m بدست میآید

تبصره - برای محاسبهٔ عبارات $\frac{1}{x'^2} - \frac{1}{x''^2}$ و $\frac{1}{x'^3} - \frac{1}{x''^3}$ وغیره را میتوان قبلاً معادله تشکیل داد که ریشه هایش y' و y'' عکس ریشه های معادلهٔ مفروض $a x^2 + b x + c = 0$

باشند و آن معادله بردفق (نمرهٔ ۸۱ جلد دوم) عبارت است از

$$c y^2 + b y + a = 0 \quad \text{پس} \quad \frac{1}{x'^m} + \frac{1}{x''^m} = y'^m + y''^m$$

چنانکه می بینیم حل مسئله بدین وسیله منجر شد بحالت اوّل و بعلاوه که بردفق این تبصره میتوان بسهولت دید که برای بدست آوردن مقادیر عبارات مذکوره کافی است که در دستورهای حالت اوّل a و c را مرتباً تبدیل به c و a نمود

امثله

۱۹ - هرگاه x' و x'' ریشه های معادله $7x^2 - 4x + 5 = 0$ باشند مطلوبست محاسبهٔ دو عبارت $4x'^3 - 6x'x''^2 + 4x''^3 - 6x'^2x''$ و $(x'^3 - x''^3)$ بدون حل معادله

۲۰ - هرگاه x' و x'' ریشه های معادله $3x^2 + 17x - 14 = 0$ باشد مطلوبست محاسبهٔ عبارت $\frac{2x'^2 + 5x'x'' + 3x''^2}{4x'x''^2 + 4x'^2x''}$ بدون حل معادله

۲۱ - معادله درجهٔ دوّم $x^2 - x + 2 = 0$ مفروض است مطلوبست محاسبهٔ عبارت $x'^3 - x''^3$ بدون حل معادله

فصل چهارم

مقایسهٔ عدد مفروضی با ریشه های معادلهٔ درجهٔ دوّم

۶ - اغلب در بحث مسائل درجه دوّم لازم میشود که عدد مفروضی را با ریشه های معادلهٔ درجهٔ دوّم قبل از حل آن مقایسه نمائیم و برای این عمل خاصیت (علامت سه جملهٔ درجهٔ دوّم برحسب مقدار x) را بکار میبرند و ما ذیلاً قضیه را که در (نمرهٔ ۵۹ جلد دوّم) در آن باب ثابت نموده ایم بخاطر میآوریم

قضیّه - علامت سه جملهٔ $y = ax^2 + bx + c$ بازاء مقادیر مختلفهٔ x همیشه همان علامت a است مگر در یک حالت که علامت y مخالف علامت a میباشد و آن وقتی است که $b^2 - 4ac > 0$ و مقادیری هم که بجای x قرار داده میشوند واقع باشند مابین x' و x'' ریشه های معادله $ax^2 + bx + c = 0$

حال فرض میکنیم که مقصود مقایسهٔ مقدار m باشد با ریشه های x' و x'' معادله

$$f(x) \equiv ax^2 + bx + c$$

چون در این معادله بجای x مقدار m را قرار دهیم حاصل میشود

$f(m) = am^2 + bm + c$ مقدار $f(m)$ را نتیجهٔ تبدیل x به m بگویند و اگر ضریب a را همیشه مثبت فرض کنیم (این فرض همیشه ممکن است زیرا در صورت منفی بودن a میتوان طرفین معادله را در ۱- ضرب نموده بدین وسیله را مثبت نمود) دو حالت ممکن است اتفاق افتد

حالت اول - $0 > f(m)$ این حالت بر وفق قضیهٔ فوق ممکن نیست اتفاق بیفتد مگر وقتیکه معادله $ax^2 + bx + c = 0$ دارای ریشه های حقیقی و متمایز بوده و مقدار m هم واقع مابین آن دو ریشه باشد

پس هر وقت نتیجهٔ تبدیل x بیک مقدار غیر مشخص m منفی باشد (در صورتیکه ضریب a مثبت باشد) میتوان دو مطلب ذیل را ثابت و محقق دانست

اولاً معادلهٔ درجهٔ دوم دارای دو ریشهٔ حقیقی و متمایز است

ثانیاً مقدار m واقع است مابین آن دو ریشه

حالت دوم - $0 < f(m)$ در این حالت فرضهای مختلفه ممکن میباشند از این قرار

اولاً معادله دارای ریشهٔ حقیقی نیست ثانیاً دارای یک ریشهٔ مضاعف مخالف m میباشد

و بالاخره ثالثاً دارای دو ریشهٔ متمایز x' و x'' میباشد

برای تحقیق حالات مذکوره میبایستی مبین معادله را تشکیل داد و اگر معادله دارای یک ریشهٔ مضاعف $x = -\frac{b}{2a}$ باشد کافیست که $-\frac{b}{a}$ را حساب کرده m را با آن مقایسه نمود

و اگر دارای دو ریشهٔ متمایز x' و x'' (فرض میکنیم که $x' < x''$ باشد) در اینصورت از روی قضیهٔ فوق میتوان استنباط کرد که مقدار m واقعست در خارج ریشه ها یعنی یا کوچکتر است از ریشهٔ کوچکتر x' ویا بزرگتر است از ریشهٔ بزرگتر x'' حال برای تحقیق این دو حالت خاصیت ذیل را بکار میبرند

نصف مجموع دو عدد غیر مساوی همیشه واقعست مابین آن دو عدد یعنی کوچکتر است از عدد بزرگتر و بزرگتر است از عدد کوچکتر

بنابراین $x'' > \frac{x'+x''}{2} > x'$ ویا $x'' > -\frac{b}{2a} > x'$

و از این رشته نامساویها واضح است که اگر m کوچکتر از $-\frac{b}{2a}$ باشد از x'' نیز کوچکتر بوده و چون نمیتواند مابین دو ریشه واقع شود پس از x' هم کوچکتر است و اگر m بزرگتر از $-\frac{b}{2a}$ باشد از x' نیز بزرگتر بوده و چون نمیتواند مابین دو ریشه واقع شود از x'' هم بزرگتر است

جدول ذیل خلاصهٔ مطالب فوق است و بر متعلمین است که همیشه آنرا در نظر داشته فراموش نکنید

مقایسهٔ عدد m با ریشه‌های معادلهٔ $f(x) \equiv ax^2 + bx + c = 0$ که در آن بفرض ضریب a همیشه مثبت است		
نتایج	**مفروضات**	
معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی و متمایز x' و x'' بوده و m واقعست مابین آنها یعنی $x'' < m < x'$	$f(m) < 0$	
معادله دارای ریشهٔ حقیقی نیست	$b^2 - 4ac < 0$	$f(m) > 0$
معادله دارای یک ریشهٔ مضاعف x' بوده و $x' \neq m$	$b^2 - 4ac = 0$	$f(m) > 0$
معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی و متمایز x' و x'' بوده $m < x' < x''$	$b^2 - 4ac < 0$ ، $m < -\frac{b}{2a}$	$f(m) > 0$
معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی و متمایز x' و x'' بوده $m > x' > x''$	$b^2 - 4ac < 0$ ، $m > -\frac{b}{2a}$	$f(m) > 0$

مثال - عدد دو را با ریشه‌های معادلهٔ $f(x) \equiv x^2 - x - 6 = 0$ مقایسه کنید

چون $f(2)$ را تشکیل دهیم حاصل میشود $f(2) = 4 - 2 - 6 = -4$ پس بر وفق جدول فوق معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی x' و x'' بوده و عدد مفروض ۲ واقعست مابین x' و x'' (بر عهدهٔ متعلمین است که بواسطهٔ حل معادله صحت نتیجهٔ فوق را امتحان کنید)

مثال ۲ - ریشه‌های معادلهٔ $7x^2 + 5x - 2 = 0$ را با عدد ۲- مقایسه کنید

چون $f(-2)$ را تشکیل دهیم حاصل میشود $f(-2) = 28 - 10 - 2 = 16$ چنانکه می‌بینیم $f(-2)$ مقداری است مثبت و معادله نیز بواسطهٔ مختلف العلامه بودن c و a دارای دو ریشهٔ حقیقی است پس بوافق جدول فوق عدد ۲- در خارج ریشه‌ها واقع است و چون ۲- از نصف مجموع ریشه‌ها یعنی از $-\frac{5}{14}$ کوچکتر است پس از هر دو ریشه کوچکتر میباشد

نتیجه - ثابت کنید که اگر A و B متحد العلامه باشند معادلهٔ $\frac{A}{x-\alpha} - \frac{B}{x-\beta} = c$ همیشه دارای دو ریشهٔ حقیقی و متمایز و یکی از آن دو ریشه واقع است مابین α و β

ابتدا مخارج را حذف کرده معادله را بصورت

$f(x) \equiv A(x-\beta) + B(x-\alpha) - c(x-\alpha)(x-\beta)$ مینویسیم حال مرتباً $f(\alpha)$ و $f(\beta)$ را تشکیل میدهیم تا حاصل شود $f(\alpha) = A(\alpha-\beta)$ و $f(\beta) = B(\beta-\alpha)$ چنانکه می‌بینیم اگر A و B متحد العلامه باشند $f(\alpha)$ و $f(\beta)$ مختلف العلامه خواهند بود بنابراین اعم از اینکه ضریب جملهٔ درجهٔ دوم مثبت یا منفی باشد همیشه معادلهٔ مفروض دارای دو ریشهٔ حقیقی و متمایز است و چون یکی از دو مقدار α و β مابین دو ریشه و مقدار دیگر در خارج ریشه‌ها واقع میشود پس یکی از

دو ریشه ما بین α و β واقع خواهد شد

مسئله - مطلوب است تعیین شرایط لازم و کافی برای آنکه ریشه ها حقیقی معادله $f(x) \equiv ax^2 + bx + c$ که در آن ضریب a مثبت فرض شده است هر دو بزرگتر یا کوچکتر از مقدار مفروض m باشند

اولین شرط لازم این است که نتیجه تبدیل x به m یعنی $f(m)$ مثبت باشد اعم از آنکه بخواهیم هر دو ریشه بزرگتر یا کوچکتر از m باشد حال اگر بخواهیم که ریشه ها بزرگتر از m باشند باید علاوه بر شرط فوق چنین داشت $\begin{cases} x' > m \\ x'' > m \end{cases}$ یا $x' + x'' > 2m$ یا $-\frac{b}{a} > 2m$

بنابراین برای آنکه هر دو ریشه بزرگتر از m باشند باید چنین داشت

$$\begin{cases} f(m) > 0 \\ -\frac{b}{2a} > m \end{cases}$$

شرایط فوق کافی نیز میباشند زیرا که از اولی نتیجه میشود که m ما بین دو ریشه واقع نیست و دومی میفهماند که m از هر دو ریشه کوچکتر است

میتوان بطریق فوق ثابت نمود که اگر بخواهیم هر دو ریشه کوچکتر از m باشد باید چنین داشت

$$\begin{cases} f(m) > 0 \\ -\frac{b}{2a} < m \end{cases}$$

امثله

۲۲ - بازاء چه مقدار m یکی از ریشه های معادله ذیل واقع است ما بین ۱- و ۱+

$$f(x) \equiv (m^2 - m - 2)x^2 + 2(m-1)x + 2 = 0$$

۲۳ - بازاء چه مقدار m ریشه های معادله ذیل واقع اند ما بین ۲ و ۴

$$x^2 - 2mx - (1 - m^2) = 0$$

۲۴ - تعیین کنید که ریشه های معادله $8x^2 + 2x - 15 = 0$ در کدام یک از فواصل ذیل واقع میباشند ۲+ ۱+ ۰ ۱- ۲-

۲۵ - محل اعداد $\frac{3}{8}$ و ۲ و ۷ و ۹ را نسبت بریشه های معادلهٔ ذیل معین کنید

$$7x^2 - 61x + 40 = 0$$

۲۶ - بازاء چه مقادیر m یکی از ریشه های معادلهٔ ذیل بزرگتر از ۲ و ریشه دیگر کوچکتر است از ۲

$$2x^2 + (m-1)x + 3m + 2 = 0$$

۲۷ - بازاء چه مقادیر m ریشه های معادلهٔ ذیل بزرگترند از ۱-

$$(m+1)x^2 - 3mx + 4m = 0$$

۲۸ - ثابت کنید که اگر ریشه های معادله $x^2 + px + q = 0$ حقیقی باشند ریشه های معادله $x^2 + px + q + (x+a)(2x+p)$ نیز بازاء جمیع مقادیر a حقیقی خواهند بود

۲۹ - ثابت کنید که معادله درجه دوم $\frac{a^2}{x-p} - \frac{b^2}{x-q} - 1 = 0$ بازاء جمیع مقادیر a و b و p و q دارای ریشه های حقیقی است

۳۰ - در معادله $(12m+7)x^2 - 3(14-3m)x + 11 - 3m = 0$ بجای m چه عددی قرار دهیم تا یک واقع ما بین دو ریشهٔ آن گردد

فصل پنجم

نامساویهای کسری

۷- **تعریف** - نامساوی راکسری گویند وقتیکه در مخرج شامل حرف مجهول باشد همیشه هر نامساوی کسری راپس از نقل جمیع جمل بطرف اول وتحویل جمل بیک مخرج میتوان بصورت کلی $\frac{A}{B} \gtrless 0$ نوشت که درآن A و B نمایش کثیرالجمله های صحیحی میباشند از حرف مجهول

قواعد حل نامساویهای کسری

اولاً - برای حل نامساویهائیکه بصورت $\frac{A}{B} \gtrless 0$ میباشند قاعده آنست که ابتدا طرفین مساوی را در مربع مخرج ضرب نمود تاآنکه نامساوی $A \times B \gtrless 0$ حاصلشود پس ازآن عمل کثیرالجمله های A و B را بعوامل درجهٔ اول تجزیه نموده و نامساوی فوق را بصورت

$$(1)\quad m(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots\ldots \gtrless 0$$

تبدیل مینمایند و بعد مقادیر α و β و γ و .... را بارعایت عظمتشان بتالی یکدیگر نوشته تاجدولی بطریق ذیل تشکیل شود

x	$-\infty$	α	β	γ	$+\infty$
	فاصله (۱)	فاصله (۲)	فاصله (۳)	فاصله (۴)	

بدیهی است که عوامل دوجمله درجهٔ اول نامساوی(۱) وقتی تغییر علامت میدهند که متغیر x از مقداری که هریک از آنها راصفر مینماید تجاوز کند بنابراین میتوان درهریک از فاصله های جدول فوق علامت حاصل ضرب عوامل نامساوی(۱) را تعیین نمود و دیدکه درکدام یک از فواصل علامت حاصلضرب عوامل موافق ومطابق علامت نامساوی مفروض است

مثال ۱ - بازاء چه مقادیر x نامساوی $3 + \frac{1}{x-1} < \frac{1}{2x+1}$ (۱) محقق است

ابتدا جملش رابطرف اول نقل کرده وتحویل بیک مخرج مینمائیم تاآنکه بصورت کلی $\frac{A}{B} \gtrless 0$ درآید وبجهت این عمل مستدرجاً چنین خواهیم داشت

$$\frac{3(x-1)(2x+1) + 2x+1 - x+1}{(x-1)(2x+1)} \gtrless 0$$

ویا $\frac{6x^2-2x-1}{(x-1)(2x+1)} \gtrless 0$ ویاپس ازحذف مخرج

$$(2)\quad (6x^2-2x-1)(x-1)(2x+1) \gtrless 0$$

درنامساوی (۲) باید عامل اول راانجاصل ضرب عوامل درجهٔ اول تجزیه نموده وبرای این عمل اول ریشه های معادله $6x^2-2x-1=0$ را

پیدا مینمائیم و آنها عبارتند از $x'' = -\frac{\sqrt{7}-1}{6} = -0.275$ و $x' = \frac{\sqrt{7}+1}{6} = 0.608$ حال نامساوی (۲) را میتوان چنین نوشت

$$12(x+0.275)(x-0.608)(x+\frac{1}{2})(x-1) > 0$$

حال جدولی از مقادیری که هر یک از عوامل طرف اول را صفر مینمایند تشکیل داده علامت حاصل ضرب عوامل را در فواصل مختلفه جدول معین میکنیم.

x	$-\infty$		-0.5		-0.275		0.608		1		$+\infty$
علامت حاصلضرب عوامل		+		−		+		−		+	

از ملاحظه و دقت در جدول فوق میتوان بسهولت فهمید که برای صحت نامساوی (۱) باید مقادیر x چنین باشند $x < -0.5$ یا $-0.275 < x < 0.608$ یا $x > 1$

مثال ۲ - نامساوی ذیل را حل کنید

$$(1) \quad \frac{2x-25}{2x^2+4x-6} + \frac{2x+11}{2x^2-2} > \frac{1}{x+3}$$

چون مانند مثال اول را بطرف اول نقل نموده و تحویل بیک مخرج کرده و بعد مخرج را حذف کنیم حاصل میشود

$$(2) \quad (x^2-3x+5)(x+3)(x-1)(x+1) >$$

در نامساوی (۲) چون علامت عامل اول را بازاء جمیع مقادیر x همیشه (+) میباشد (زیرا که در آن مبین منفی و ضریب جملهٔ درجهٔ دوم مثبت است) پس میتوان بدون

آنکه تغییری در جهت نامساوی حاصل شود طرفینش را بر آن عامل قسمت نمود تا حاصل شود $(x+3)(x-1)(x+1) > 0$ (۳) حال برای حل نامساوی (۳) جدول ذیل را تشکیل میدهیم

x	$-\infty$		-3		[illegible]		1		$+\infty$
علامت حاصل ضرب [illegible]		−		+		−		+	

پس برای آنکه نامساوی (۱) محقق باشد باید مقادیر x را بطریق ذیل انتخاب نمود

$-3 < x < -1$ یا $x > 1$

مثال ۳ - نامساوی $\frac{x^2-3x+2}{x(2x+1)} > 0$ را حل کنید

چون طرفین نامساوی را در مجذور مخرج ضرب کنیم حاصل میشود

$$(1) \quad x(2x+1)(x^2-3x+2) > 0$$

پس از تجزیهٔ عامل سوم نامساوی (۱) چنین نوشته میشود

$2x(x+0.5)(x-1)(x-2) > 0$ حال جدول ذیل را تشکیل میدهیم

x	$-\infty$		-0.5		0		1		2		$+\infty$
علامت حاصلضرب عوامل		+		−		+		−		+	

از ملاحظهٔ در جدول فوق میتوان بسهولت دید که برای صحت نامساوی معروض باید مقادیر متغیر را چنین انتخاب نمود یا $x < -0.5$ یا $0 < x < 1$ یا $x > 2$

ثانیاً - برای حل نامساویهائیکه بصورت $\frac{A}{B} > 0$ میباشند میتوان بدون حذف

مخرج مستقیماً علامات دو جمله کسر را بازاء مقادیر مختلفه x تعیین نمود و آنوقت برای x مقادیری انتخاب کرد که بازاء آنها کثیر الجمله های A و B متحد العلامه باشند

مثال ـ نامساوی ذیل را حل کنید

$$\frac{x - 3x + 2}{2x^2 + 7x + 3} > 0 \quad (1)$$

ابتدا صورت و مخرج را بعوامل درجه اول تجزیه

$$\frac{(x-1)(x-2)}{2(x+0.5)(x+3)} > 0$$

میکنیم حال برای تحقیق علامات صورت و مخرج جدول ذیل را تشکیل میدهیم

x	$-\infty$	-3	$+0.5$	1	2	$+\infty$
علامت صورت	+	+	+	−	+	
علامت مخرج	+	−	+	+	+	
علامت کسر	+	−	+	−	+	

امثله

بر وفق جدول فوق باید مقادیر x را بطریق ذیل انتخاب نمود

$x < -3$ یا $-0.5 < x < 1$ یا $x > 2$

۲۱ ـ نامساویهای ذیل را حل کنید

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2} > 0 \quad , \quad \frac{4x^2 + 9x + 18}{x - 1} > 9x$$

$$\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)} > 1 \quad , \quad \frac{2x^2 - 6x + 2}{x^2 - 5x + 4} > 1$$

$$\frac{x^4 - 17x^2 + 60}{x(x^2 - 8x + 15)} > 0 \quad , \quad \frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x+1} < \frac{2}{2x-1}$$

$$\frac{x^2 + 3x + 2}{x(2x-1)} < 0 \quad , \quad \frac{4x^2 + 9x + 1}{x + 1} \; 9$$

$$\frac{x^2 - 12x + 35}{(x+10)(x^2 + 5x + 4)} > 0 \quad , \quad \frac{5x^2 - 2x + 3}{(x-1)(-x^2 - x - 1)} < 0$$

فصل ششم

شرایط آنکه دو معادله یک مجهولی درجه دوم دارای یک یا دو ریشه مشترک باشند

۸ ـ اولاً ـ شرط اینکه دو معادله یک مجهولی درجه دوم

$$\begin{cases} (1)\ ax^2 + bx + c = 0 \\ (2)\ a'x^2 + b'x + c' = 0 \end{cases}$$

دارای یک ریشه مشترک باشند این است که مابین ضرایب ایشان رابطه ذیل محقق باشد

$$(3)\quad (ac' - ca')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb') = 0$$

برهان ـ فرض میکنیم که α و β ریشه های معادله (۱) و α' و β' هم ریشه های معادله (۲) باشند برای اینکه معادلات (۱) و (۲) اقلاً دارای یک ریشه مشترک باشند باید تساوی ذیل محقق باشد

$$(4)\quad (a\alpha'^2 + b\alpha' + c(a\beta'^2 + b\beta' + c') = 0$$

یعنی که یکی از ریشه های α' یا β' معادله (۲) در معادله (۱) صدق نموده و بنابراین مشترک مابین دو معادله باشد حال در رابطه (۴) α' و β' را حذف میکنیم و بجهة این عمل ابتدا آنرا بسط میدهیم تا حاصل شود

$$a'^2(\alpha\beta)^2 + ab'(\alpha+\beta)\alpha\beta + b'^2(\alpha\beta) + ac'(\alpha^2+\beta^2) + bc'(\alpha+\beta) + c'^2 = 0$$

و چون در این رابطه بجای $(\beta+\alpha)$ و $(\alpha^2+\beta^2)$ و $\alpha\beta$ مقادیرشان را قرار داده و بعد تمام جمل رابطهٔ جدید را در a^2 ضرب کنیم میتوان آنوقت آنرا به سهولت بصورت (۳) نوشت

میتوان رابطه (۳) را بطریق ذیل هم بدست آورد از اینقرار فرض میکنیم که $x^2 = y$ بنابراین معادلات (۱) و (۲) را میتوان چنین نوشت

$$(5)\ \begin{cases} ay + bx + c = 0 \\ a'y + b'x + c' = 0 \end{cases}$$

حال اگر $ab' - ba' \neq 0$ مقادیر y و x چنین خواهند بود $y = \frac{bc' - cb'}{ab' - ba'}$ و $x = \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}$

اگر معادلات دستگاه (۵) و بنابراین معادلات (۱) و (۲) ریشهٔ مشترکی مانند α قبول کنند باید چنین داشت $\alpha = \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}$ و $\alpha^2 = \frac{bc' - cb'}{ab' - ba'}$

و یا $\left(\frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}\right)^2 = \frac{bc' - cb'}{ab' - ba'}$

و چون در این رابطه مخارج را حذف کنیم رابطهٔ (۳) بدست میآید

و اگر $ab' - ba' = 0$ در این صورت دو حالت ممکنست فرض نمود اولاً یکی از ضرایب a و a' مخالف صفر است ثانیاً $a = a' = 0$

حالت اول - فرض میکنیم که مثلاً ضریب a مخالف صفر میباشد در اینحالت

از رابطهٔ $ab' - ba' = 0$ میتوان چنین داشت $b' = \frac{ba'}{a}$ و چون در معادله (۲) بجای b' مساویش $\frac{ba'}{a}$ را قرار دهیم حاصل میشود $a'(ax^2 + bx) + ac' = 0$ حال اگر a' مخالف صفر باشد معادلات (۱) و (۶) و بنابراین (۱) و (۲) نمیتوانند ریشهٔ مشترکی قبول کنند مگر وقتی که $ac' = ca'$ بنابراین رابطه (۳) محقق است و اگر $a' = 0$ برای محقق بودن معادله (۶) لازم است که $ac' = 0$ در این صورت معادله (۶) منجر بیک مماثله شده و بازاء جمیع مقادیر عدد و بنابراین بازاء ریشه‌های معادله (۱) محقق است چنانکه ملاحظه میشود در اینحالت هم رابطه (۳) محقق میباشد

حالت دوم - $a = a' = 0$ در اینصورت یکی از دو ریشهٔ معادلات (۱) و (۲) مساویست با الی غیر النهایه (نمرهٔ ۳) و میتوان آنرا ریشهٔ مشترک دو معادله دانست صحت رابطهٔ (۳) در اینحالت نیز محقق و واضح است پس شرط لازم و کافی برای اینکه معادلات (۱) و (۲) اقلاً دارای یک ریشه مشترک باشند این است که مابین ضرایبشان رابطهٔ (۳) محقق باشد و باید دانست که در صورت صحت رابطه (۳) مقدار ریشهٔ مشترک α مساوی است با

$$\alpha = \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}$$

ثانیاً - شرط اینکه دو معادلهٔ یک مجهولی درجهٔ دوم (۱) و (۲) دارای دو ریشهٔ مشترک باشند این است که ضرایب جمل متشابه آنها متناسب باشند یعنی $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

زیرا اگر مقدار مشترک نسب فوق را به K بنامیم معادله (۱) را میتوان چنین نوشت $K(a'x^2 + b'x + c') = 0$ و بسهولت میتوان دید که ریشه های اینمعادله همان ریشه های معادله (۲) میباشند

میتوان صحت شرط فوق را بطریق دیگر ثابت نمود از اینقرار فرض میکنیم که α و β ریشه های مشترک معادلات (۱) و (۲) باشند بر وفق روابط مابین ضرایب و ریشه ها تساویهای ذیل محقق میباشند

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \quad \text{و} \quad \alpha\beta = \frac{c}{a} \quad \text{و} \quad \alpha + \beta = -\frac{b'}{a'} \quad \text{و} \quad \alpha\beta = \frac{c'}{a'} \quad \text{پس}$$

$$-\frac{b}{a} = -\frac{b'}{a'} \quad \text{و} \quad \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'} \quad \text{و یا} \quad \frac{b}{b'} = \frac{a}{a'} \quad \text{و} \quad \frac{c}{c'} = \frac{a}{a'}$$

و بنابراین $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

امثله

۳۲ - بازاء چه مقدار m و n معادلات ذیل دارای ریشه های مشترک میباشند

$$\begin{cases} (2m+1)x^2 - (3m-1)x + 2 = 0 \\ (m+2)x^2 - (2n+1)x - 1 = 0 \end{cases}$$

۳۳ - مطلوب است تعیین مقدار m بطریقی که معادلات ذیل دارای یک ریشهٔ مشترک باشند

$$\begin{cases} 3x^2 + 3(m-1)x + m + 1 = 0 \\ 2x^2 + 2(m-1)x + 3m + 2 = 0 \end{cases}$$

۳۴ - معادلات درجهٔ دوم

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 12 = 0 \\ x^2 - 3x + q = 0 \end{cases}$$

مفروض اند مطلوبست تعیین مقدار q بطریقی که معادلات مفروضه دارای یک ریشهٔ مشترک باشند

۳۵ - چه رابطه مابین ضرایب معادلات ذیل باید موجود باشد تا آنکه معادلات مفروضه دارای یک ریشه باشند

$$\begin{cases} x^2 + px + q = 0 \\ x^2 + p'x + q' = 0 \end{cases}$$

۳۶ - مطلوب است تعیین مقدار m و n بطریقی که معادلات ذیل دارای ریشه های مشترک باشند

$$\begin{cases} (5m-52)x^2 - (m-4)x + 4 = 0 \\ (2m+1)x^2 - 5nx + 20 = 0 \end{cases}$$

فصل هفتم

حل دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی درجهٔ دوم

۹- چون هر دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی درجهٔ دوم را نسبت بقوای نزولی x مرتب کنیم بصورت

$$\begin{cases} (1)\quad ax^2 + bx + c = 0 \\ (2)\quad a'x^2 + b'x + c' = 0 \end{cases}$$

در میاید که در آن a و a' نسبت به y از درجهٔ صفر و b و b' نسبت به y از درجهٔ اول و c و c' نسبت به y از درجهٔ دوم میباشند

برای اینکه معادلات (۱) و (۲) نسبت به x ریشهٔ مشترکی قبول کنند میبایستی که بر وفق (نمرهٔ ۸) مابین ضرایب آنها رابطهٔ ذیل محقق باشد

$$(3)\quad (ac'-ca')^2 - (ab'-ba')(bc'-cb') = 0$$

رابطهٔ (۳) نسبت به مجهول y معادلهٔ یک مجهولی است از درجهٔ چهارم و چون آنرا حل کرده و مقادیر y را در ریشهٔ مشترک معادلات (۱) و (۲) یعنی در رابطه (۴) $x = \dfrac{ca' - ac'}{ab' - ba'}$ قرار دهیم مقادیر نظیر x هم بدست میآیند پس دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی درجهٔ دوم کلیهٔ دارای چهار رشته جواب میباشد.

باید دانست که همیشه هر دستگاه دو معادله دو مجهولی درجهٔ دوم را میتوان بسهولت حل نمود زیرا چنانکه می بینیم حلش منجر میشود بحل معادلهٔ یک مجهولی درجهٔ چهارم (۳) که اگر شامل بعضی شرایط مخصوصه نباشد نمیتوان آنرا حل نمود

مثال ا- دستگاه دو معادله دو مجهولی درجهٔ دوم ذیل را حل کنید

$$(1)\quad \begin{cases} 8x^2 - 2xy - y^2 - 18x + 6y + 7 = 0 \\ 10x^2 + 5xy - 2y^2 - 9x + 3y - 7 = 0 \end{cases}$$

ابتدا معادلات دستگاه مفروضه را نسبت به قوای نزولی x مرتب کرده و بصورت معادلات (۱) و (۲) مینویسیم

$$(2)\quad \begin{cases} 8x^2 - 2(y+9)x - (y^2 - 6y - 7) = 0 \\ 10x^2 + (5y-9)x - (2y^2 - 3y + 7) = 0 \end{cases}$$

حال چون رابطهٔ (۳) را برای معادلات دستگاه (۲) نوشته و از اختصر کنیم حاصل میشود $y^4 - 10y^2 + 9 = 0$ ریشه‌های این معادلهٔ دو مجذوری عبارتند از $y_1 = +1$ و $y_2 = -1$ و $y_3 = 3$ و $y_4 = -3$ و چون مقادیر y را مرتباً در رابطه

$$x = \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'} = \frac{6y^2 + 36y + 126}{60y + 108} = \frac{y^2 + 6y + 21}{2(5y + 9)}$$

قرار دهیم مقادیر نظایر x حاصل میشوند $x_1 = 1$ و $x_2 = 2$ و $x_3 = 1$ و $x_4 = 1$

پس چهار رشته جواب دستگاه مفروضه چنین میباشند

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x = +2 \\ y = -1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \end{cases}$$

تبصرهٔ - باید دانست که هیچوقت نباید مقید بود باینکه همیشه میبایستی هر دستگاه دو معادله

دو مجهولی درجهٔ دوم را موافق قاعدهٔ مثال فوق حل نمود مثلاً اگر بخواهیم دستگاه مثال ذیل را بر وفق قاعدهٔ مذکوره فوق حل کنیم عمل خیلی مشکل و درهم میشود و حال آنکه میتوان آنرا بقاعدهٔ دیگری بطریق بسیار سهلی حل نمود

مثال ۲ - دستگاه معادلات ذیل را حل کنید

$$(1)\begin{cases} x^2+2xy+y^2-ax-ay=0 \\ x^2-2xy+y^2-bx+by=0 \end{cases}$$

ابتدا معادلات دستگاه مفروضه را بصورت ذیل مینویسیم

$$(2)\begin{cases} (x+y)(x+y-a)=0 \\ (x-y)(x-y-b)=0 \end{cases}$$

و حال میتوان بسهولت دید که برای اینکه معادلات دستگاه (۲) و بنابراین معادلات دستگاه (۱) محقق باشند باید چنین داشت

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} x-y=0 \\ x-y-b=0 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} x+y-a=0 \\ x-y=0 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} x+y-a=0 \\ x-y-b=0 \end{cases}$$

و چون هریک از دستگاههای فوق را حل کنیم مرتباً چنین خواهیم داشت

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} , \begin{cases} x=\frac{b}{2} \\ y=-\frac{b}{2} \end{cases} , \begin{cases} x=+\frac{a}{2} \\ y=+\frac{a}{2} \end{cases} \text{ و } \begin{cases} x=\frac{a+b}{2} \\ y=\frac{a-b}{2} \end{cases}$$

امثله

۴۷ - دستگاه معادلات ذیل را حل کنید

$$\begin{cases} x^2+y^2=2{,}5 \\ \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=4{,}25 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2xy-3y-3=0 \\ y^2-4xy+15=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2-5=0 \\ xy+(x+y)-8=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2xy-3y-3=0 \\ y^2-4xy+15=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}=\frac{5}{2} \\ x+y^2=90 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+xy=10 \\ y^2+xy=15 \end{cases}$$

فصل هشتم

تغییرات سه جمله دو مجذوری و نمایش هندسی آن

۱۰ - اولاً تغییرات سه جمله دو مجذوری - سه جمله دو مجذوری ax^4+bx^2+c تابعی است از متغیر x برای معرفت تغییرات وقتیکه از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر میکند ابتدا آنرا بصورت ذیل مینویسیم

$$y \equiv ax^4+bx^2+c \equiv a\left[\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$$

از رابطهٔ فوق میتوان بسهولت دید که جهة تغییرات عبارت y برحسب آنکه a مثبت یا منفی باشد هم بجهة تغییرات مقدار داخل جامعه یا مخالف آن میباشد حال چون محض سهولت تحریر مقدار داخل جامعه را به z بنامیم می بینیم که تغییرات عبارت z بسته است به تغییرات مقدار $\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2$ که عبارتست از فضل z بر مقدار ثابت $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$ پس برای تعیین تغییرات سه جملهٔ دو مجذوری y میبایستی تغییرات z و بنابراین تغییرات عبارت $\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2$ را معین نمود

تغییرات عبارت $\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2$ — چون مربع هر مقدار تغییرپذیری در جهة قدر مطلقش تغییر میکند یعنی اگر قدر مطلق مقدار متغیری ترقی یا تنزل نماید

مربعش نیز ترقی یا تنزل مینماید پس عبارت $(x^2+\frac{b}{2a})^2$ هم درجهت قدر مطلق $(x^2+\frac{b}{2a})$ تغییر میکند و برای تعیین تغییرات قدر مطلق $(x^2+\frac{b}{2a})$ دو حالت میتوان منظور داشت

حالت اول $\frac{b}{2a} > 0$ — درانیحالت چون متغیر x از $-\infty$ تا صفر و از صفر تا $+\infty$ ترقی کند قدر مطلق $(x^2+\frac{b}{2a})$ از ∞ تا $\frac{b}{2a}$ تنزل کرده و بعد از $\frac{b}{2a}$ تا ∞ ترقی مینماید بنابراین مربعش $(x^2+\frac{b}{2a})^2$ هم از $+\infty$ تا $\frac{b^2}{4a^2}$ تنزل کرده و از $\frac{b^2}{4a^2}$ تا $+\infty$ ترقی مینماید حال اگر a مثبت باشد az ویا y ابتدا از $+\infty$ تا c تنزل نموده و بعد از c تا $+\infty$ ترقی میکند و اگر a منفی باشد az ویا y ابتدا از $-\infty$ تا c ترقی کرده و بعد از c تا $-\infty$ تنزل میکند

حالت دوم $\frac{b}{2a} < 0$ — دراین صورت عبارت $x^2+\frac{b}{2a}$ بازاء $x = \pm\sqrt{-\frac{b}{2a}}$ مساوی صفر میگردد و چون متغیر x از $-\infty$ تا $-\sqrt{-\frac{b}{2a}}$ و از این مقدار تا صفر و از صفر تا $+\sqrt{-\frac{b}{2a}}$ و از این مقدار تا $+\infty$ ترقی کند قدر مطلق $(x^2+\frac{b}{2a})$ در فواصل مختلفه مذکوره بترتیب تنزل و ترقی مینماید بنابراین مربعش هم بترتیب ابتدا از $+\infty$ تا صفر تنزل نموده و از صفر تا $\frac{b^2}{4a^2}$

ترقی کرده و مجدداً از $\frac{b^2}{4a^2}$ تا صفر تنزل کرده و بالاخره از صفر تا $+\infty$ ترقی مینماید و آنوقت برحسب آنکه a مثبت یا منفی باشد تغییرات az ویا y بهمان ترتیب تغییرات $(x^2+\frac{b}{2a})^2$ یا مخالف تغییرات آن میباشد

جدول ذیل که موسوم است بجدول تغییرات سه جمله دو مجذوری شامل خلاصه مطالب فوق میباشد:

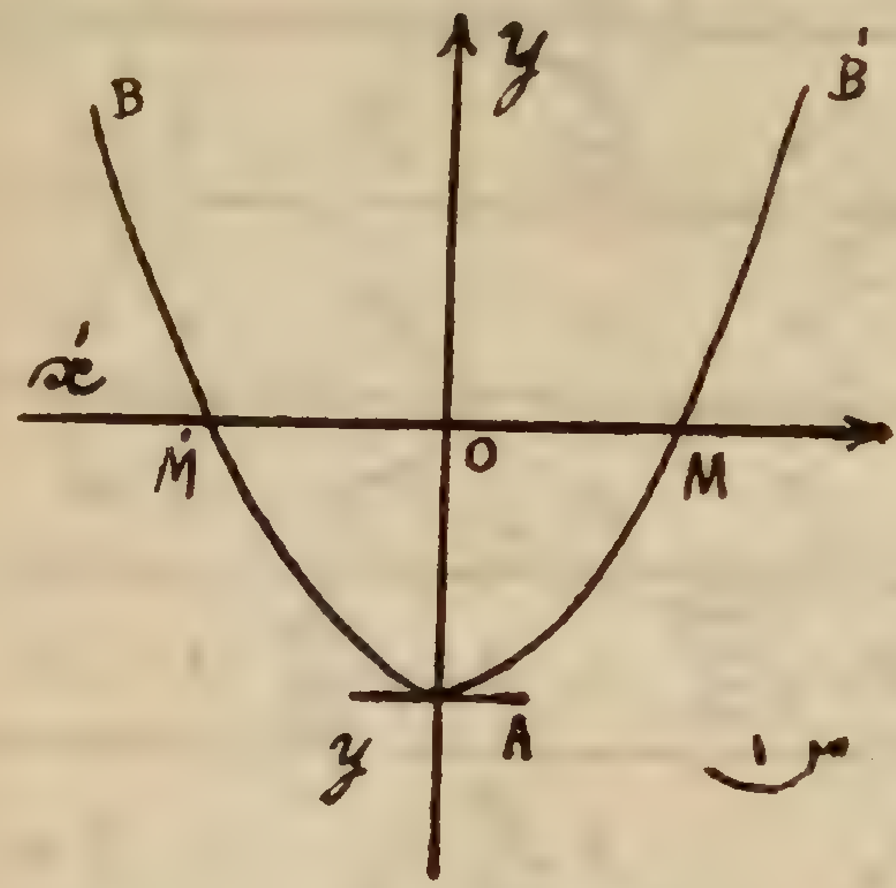
جدول تغییرات سه جمله دو مجذوری

حالت اول $\frac{b}{2a} > 0$	x	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$
	$\lvert x^2+\frac{b}{2a})^2\rvert$	∞	↘	$\frac{b}{2a}$	↗	∞
	$(x^2+\frac{b}{2a})^2$	$+\infty$	↘	$\frac{b^2}{4a^2}$	↗	$+\infty$
	$a>0\ y\equiv az$	$+\infty$	↘	c	↗	$+\infty$
	$a<0\ y\equiv az$	$-\infty$	↗	c	↘	$-\infty$

حالت دوم $\frac{b}{2a} < 0$	x	$-\infty$	↗	$-\sqrt{\frac{-b}{2a}}$	↗	0	↗	$+\sqrt{-\frac{b}{2a}}$	↗	$+\infty$
	$\lvert x^2+\frac{b}{2a}\rvert$	∞	↘	0	↗	$\frac{b}{2a}$	↘	0	↗	∞
	$(x^2+\frac{b}{2a})^2$	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{b^2}{4a^2}$	↘	0	↗	$+\infty$
	$a>0\ y\equiv az$	$+\infty$	↘	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	↗	c	↘	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	↗	$+\infty$
	$a<0\ y\equiv az$	$-\infty$	↗	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	↘	c	↗	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	↘	$-\infty$

ثانیاً نمایش هندسی تغییرات سه جمله دو مجذوری - میتوان تغییرات سه جمله دو مجذوری $y = ax^4 + bx^2 + c$ را بطریق هندسی نمود از اینقرار ابتدا در سطحی دو محور xx' و yy' را بزاویهٔ قائمه رسم مینمائیم و بعد چون x و y را بمنزله مختصات یکنقطه از سطح xoy منظور بداریم برحسب علامت $\frac{b}{2a}$ دو حالت عمده ممکن است اتفاق افتد

حالت اول $0 < \frac{b}{2a}$ در این حالت ممکن است که ضریب a مثبت یا منفی باشد

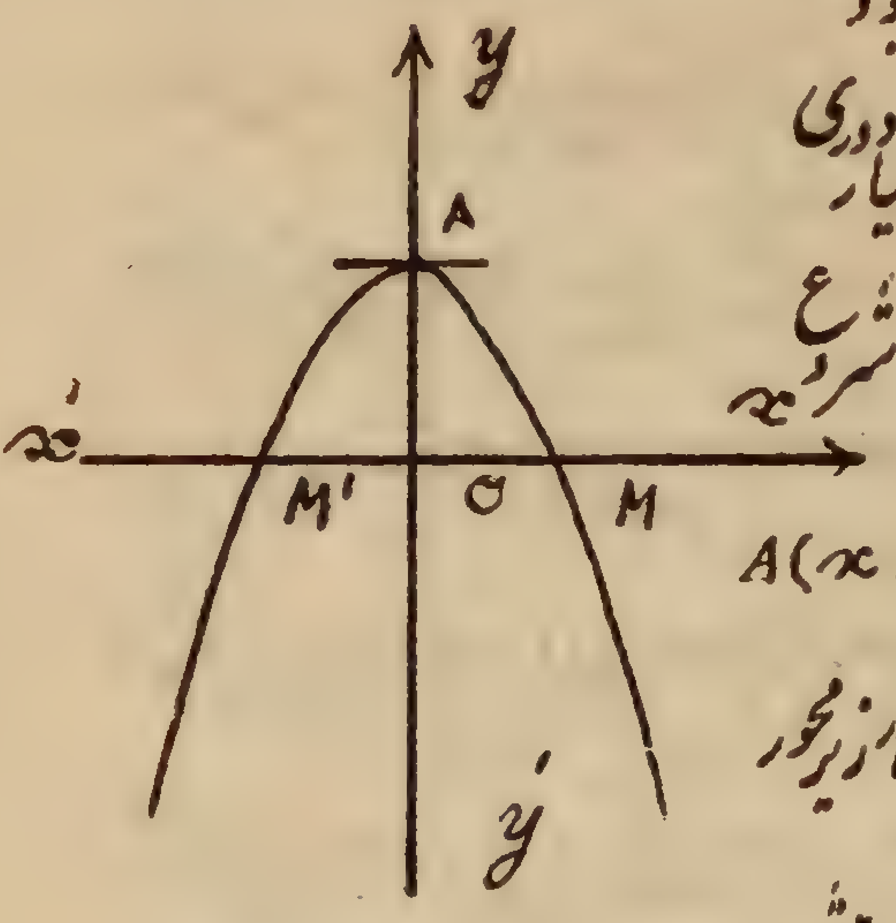


ش ۱

۱- $0 < a$ در این صورت بر وفق قسمت اول جدول فوق چون متغیر x از $-\infty$ تا صفر و از صفر تا $+\infty$ همواره تغییر و ترقی کند مقدار تابع y ابتدا از $+\infty$ تا c تنزل نموده و بعد از c تا $+\infty$ ترقی مینماید بنابراین منحنی نمایش تغییرات سه جمله مرکب است از دو شاخه ش ۱ یک شاخه نزولی BA که ابتدا از یک نقطه بسیار دوری در سمت یسار محور yy' و در فوق xx' شروع شده منتهی میشود به نقطه $A\ (x = 0\ ,\ y = c)$ و یک شاخه صعودی AB' که از نقطهٔ A

شروع شده در فوق xx' بسمت یمین yy' بینهایت از مبداء o دور میشود

۲- $0 > a$ در این حالت هم موافق جدول فوق چون متغیر x از $-\infty$ تا صفر و از صفر تا $+\infty$ تغییر کند سه جملهٔ y از $-\infty$ تا c ترقی کرده و بعد از c تا $-\infty$ تنزل مینماید پس منحنی نمایش تغییرات سه جمله مرکب از دو شاخه خواهد بود (ش ۲) یک شاخه صعودی BA که از یک نقطه بسیار دوری در سمت یسار yy' و در تحت محور xx' شروع نموده منتهی میشود بنقطه $A(x = 0\ ,\ y = c)$ و یکشاخه نزولی که از نقطهٔ A شروع شده در زیر محور xx' بسمت راست yy' الی غیر النهایه دور میشود



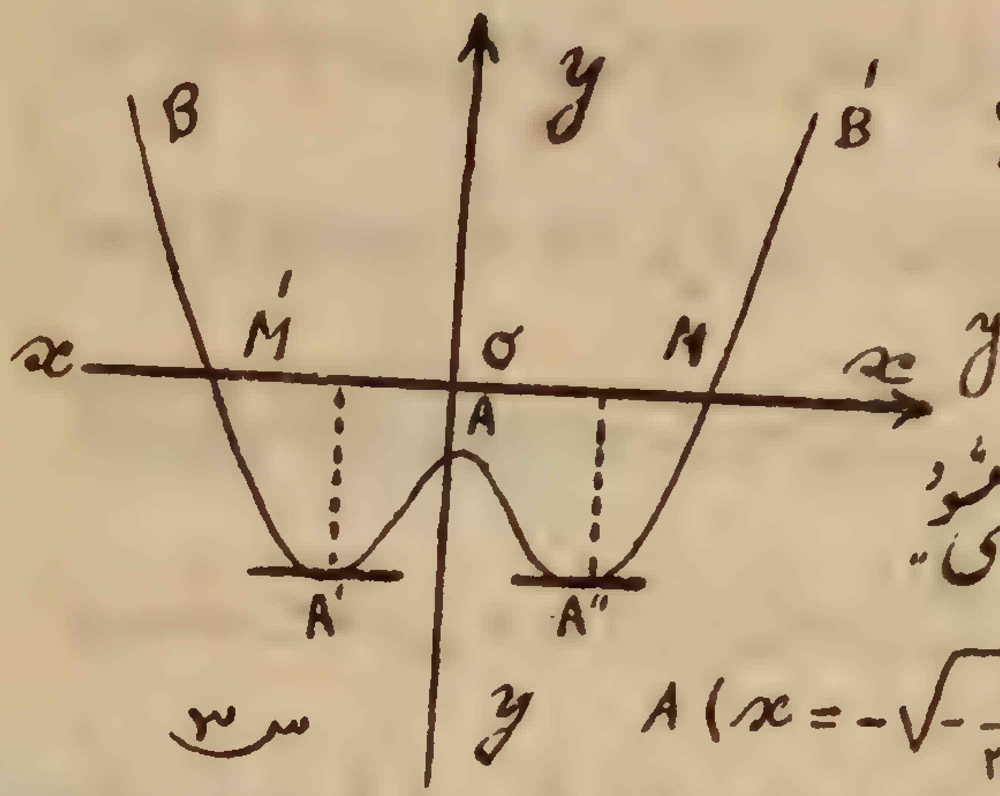
ش ۲

حالت دوم $0 > \frac{b}{2a}$ - درایصورت هم برحسب علامت a میتوان دو حالت منظور داشت

۱- $0 < a$ بر وفق قسمت دوم جدول فوق چون x از $-\infty$ تا $-\sqrt{-\frac{b}{2a}}$ و از این مقدار تا صفر و از صفر تا $+\sqrt{-\frac{b}{2a}}$ و بالاخره از این مقدار تا $+\infty$ تغییر و ترقی کند مقدار y ابتدا از $+\infty$ تا $\frac{4ac-b^2}{4a}$ تنزل کرده و بالاخره از این مقدار تا $+\infty$ ترقی مینماید بنابراین منحنی نمایش تغییرات سه جمله دو مجذوری در اینحالت مرکب است

از چهار شاخه س ۳ از این قرار

اولاً یک شاخه نزولی BA' که از یک نقطه بسیار دوری در سمت چپ $y'y$ و در فوق $x'x$ شروع شده منتهی میشود بنقطه $A'\left(x = -\sqrt{-\frac{b}{2a}},\ y = \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$

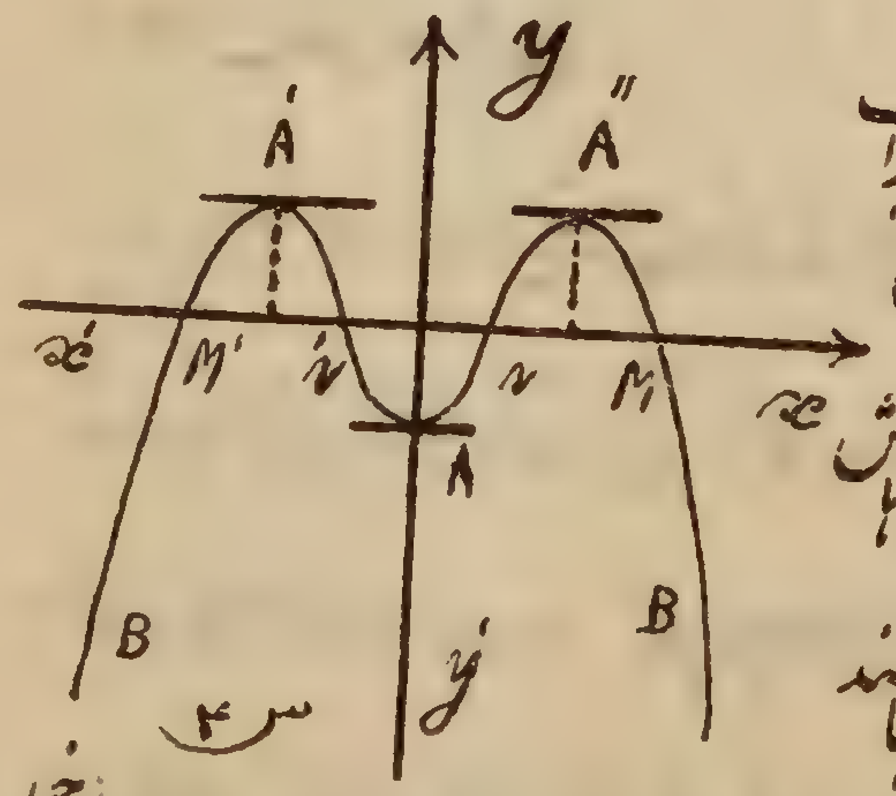


س ۳

ثانیاً از یک شاخه صعودی $A'A$ که از نقطه A' شروع شده منتهی میشود به نقطه A

ثالثاً از یک شاخه نزولی AA'' که از نقطه A شروع شده منتهی میشود بنقطه $A''\left(x = +\sqrt{-\frac{b}{2a}},\ y = \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ و بالاخره از یک شاخه صعودی $A''B'$ که از نقطه A'' شروع شده در سمت راست $y'y$ و در فوق xx' بینهایت از مبداء دور میشود

۲- $a < 0$ - در اینحالت منحنی نمایش تغییرات سه جمله دو مجذوری همان منحنی س ۳ است که بعکس ترتیب اول قرار گرفته یعنی که شاخه هایش نیز در میان صعودی و نزولی میباشند



س ۴

باید دانست که وقتیکه $\frac{b}{2a}$ مثبت باشد منحنی نمایش تغییرات سه جمله دو مجذوری خیلی

شبیه است بمنحنی نمایش تغییرات سه جمله درجه دوم یعنی به شلجمی (قطع مکافی) ولی در حقیقت شلجمی نیست

برحسب بحث (نمره ۴۸ جلد دوم) و برحسب علامات $\frac{b}{2a}$ و a منحنی نمایش تغییرات سه جمله دو مجذوری میتواند با محورهای مختصات اوضاع مختلفه اختیار نماید و ما تعیین آنها را بعنوان تکلیف بعهده متعلمین ساعی واگذار مینمائیم

از رابطهٔ $y = ax^4 + bx^2 + c$ میتوان بسهولت دید که بازاء دو مقدار متساوی و مختلف العلامه x فقط یک مقدار برای y بدست میآید مثلاً بازاء $x = \pm 1$ مقدار y مساوی است با $a + b + c$ پس محور $y'y$ محور تقارن منحنیات نمایش تغییرات سه جمله دو مجذوری میباشد و برای تعیین تغییرات y کافی است که x را از $-\infty$ تا صفر تغییر داد زیرا که چون x از صفر تا $+\infty$ تغییر کند مقادیر نظایر y همان مقادیری خواهند بود که در ضمن تغییرات x از $-\infty$ تا صفر پیدا شده بودند

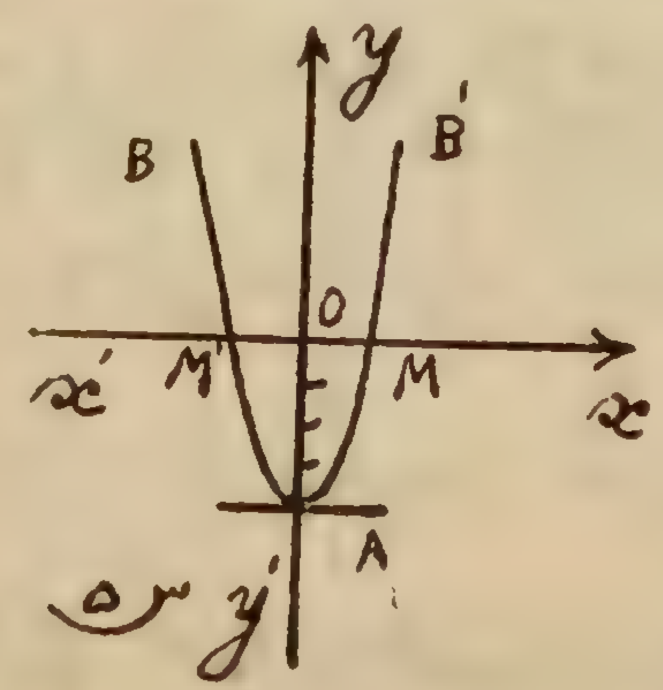
تبصره - در رسم منحنی نمایش تغییرات سه جمله دو مجذوری ابتدا میبایستی علامت $\frac{b}{2a}$ را معین نمود اگر $\frac{b}{2a}$ مثبت باشد قبلاً مواضع نقاط اصلیه A و M و M' (اگر M و M' موجود باشند) را معین نموده بعد منحنی را رسم میکنند

و اگر $\frac{b}{2a}$ منفی باشد ابتدا مواضع نقاط اصلیه A و A' و A'' و M و M' و N و

و N' (هرگاه M و M' و N و N' موجود باشند) را معین کرده و بعد منحنی را رسم مینمایند

مثال ۱- منحنی نمایش تغییرات سه جمله‌ای دو مجذوری $y = x^4 + 3x^2 - 4$ را رسم کنید

چون بر وفق تبصرهٔ فوق عمل کنیم می بینیم که $\frac{b}{2a}$ مثبت و مساوی است با $\frac{3}{2}$ پس بترتیب مواضع نقاط اصلیه A و M و M' را معین مینمائیم $A(x=0,\ y=c=-4)$ و دو نقطهٔ دیگر M و M' درصورتیکه موجود باشند عبارتند از نقاط فصل مشترک منحنی با محور xx' پس عرضهای نقاط مذکوره مساوی صفر است و برای تعیین طولهای آنها ریشه‌های معادله $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$ را پیدا مینمائیم این معادله دارای دو ریشهٔ موهومی ۲+ و ۲- و دو ریشهٔ حقیقی ۱+ و ۱- میباشد پس مختصات نقاط M و M' چنین میباشند



ش ۵

$M(x=+1\quad y=0)$ و

$M'(x=-1\quad y=0)$

میتوان غیر از نقاط اصلیه یک عده غیر مشخص از نقاط دیگر منحنی را هم تعیین نمود بدین طریق

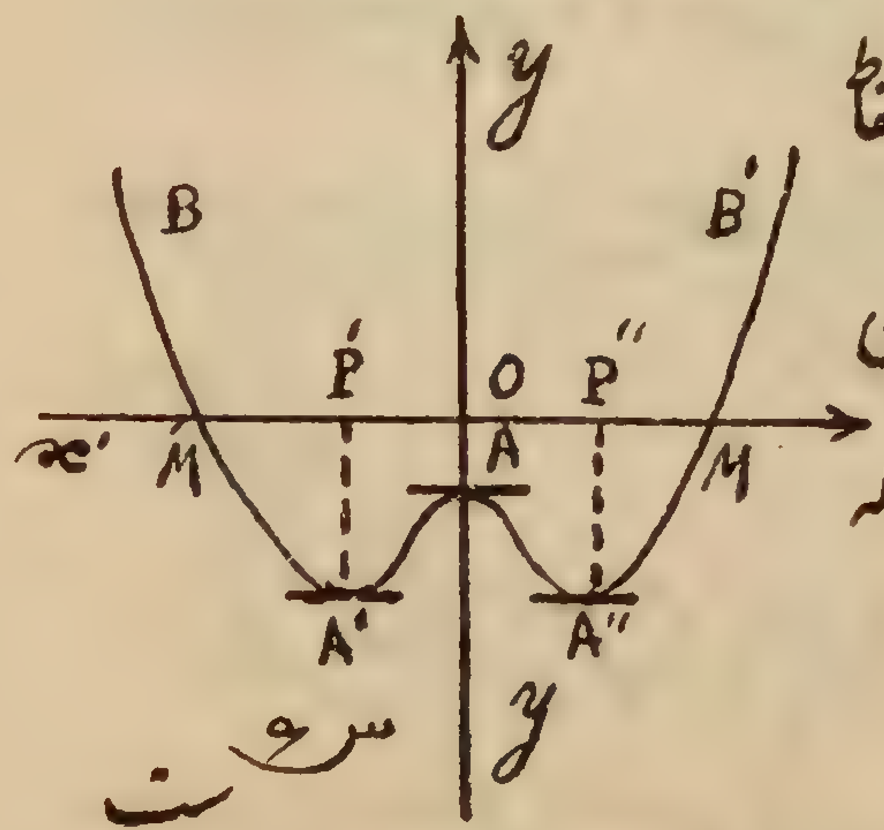
که بتغییر x مقادیری باختیار نسبت داده مقادیر نظایر y را معین نمود مثلاً بازاء $x = \pm 2$ مقدار y مساوی است با $y = 24$ وهکذا حال چون موافق حالت اول مواضع نقاط اصلیه را بیکدیگر وصل کنیم شکل منحنی نمایش تغییرات y بدست میآید

مثال ۲- منحنی نمایش تغییرات تابع $y = x^4 - 3x^2 - 4$ را رسم کنید

در این مثال مقدار $\frac{b}{2a}$ منفی و مساوی است با $-\frac{3}{2}$ بنابراین برحسب تبصرهٔ فوق لازم است که ابتدا مواضع نقاط اصلیه A و A' و A'' و M و M' و N و N' را معین نمود مختصات نقاط A و A' و A'' بترتیب عبارتند از $A(x=0,\ y=-4)$ و

$$A'\left(x = -\sqrt{-\frac{b}{2a}} = -\sqrt{\frac{3}{2}}\qquad y = \frac{4ac-b^2}{4a} = -\frac{25}{4}\right)$$

$$A''\left(x = +\sqrt{-\frac{b}{2a}} = +\sqrt{\frac{3}{2}},\ y = \frac{4ac-b^2}{4a} = -\frac{25}{4}\right)$$



ش ۶

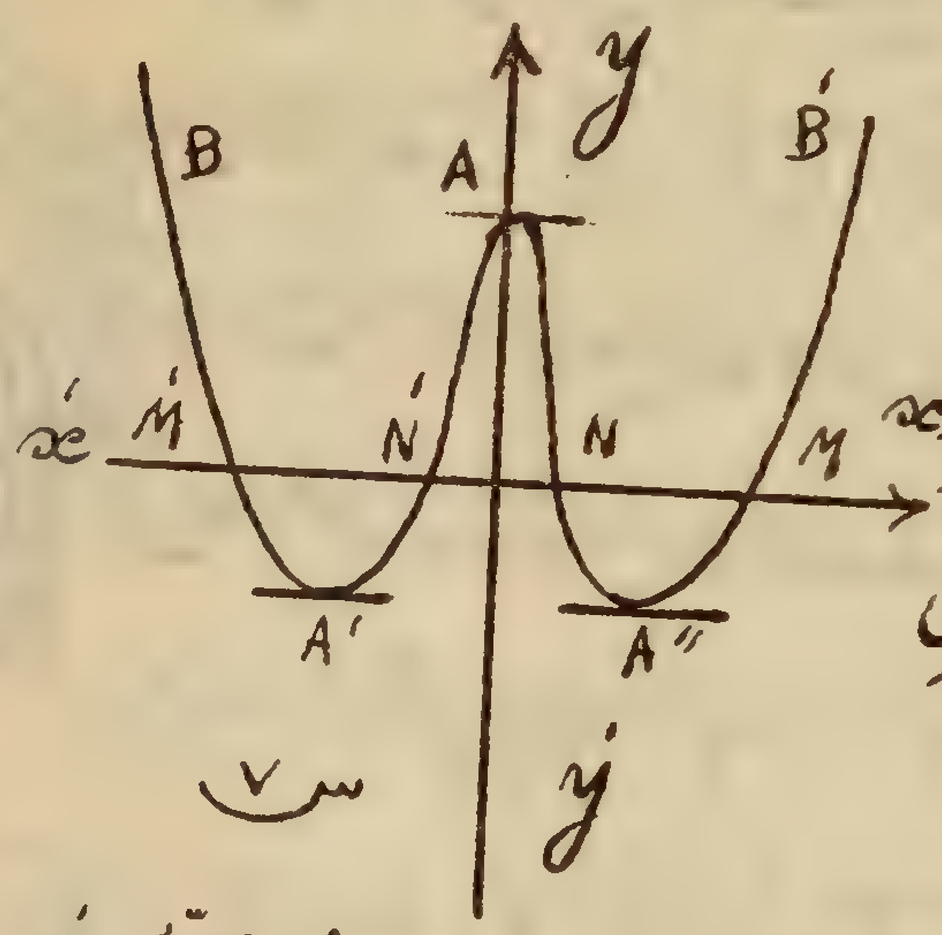
چون نقاط M و M' و N و N' عبارتند از نقاط فصل مشترک منحنی با محور xx' پس بجهة تعیین طولهای این نقاط باید ریشه‌های معادله $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ را معین نمود

این معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی ۲+ و ۲- و دو ریشه موهومی ن+ و ن- است

پس دونقطه M و M' از نقاط چهارگانه M و M' و N و N' موجود بوده و دو نقطه دیگر N و N' وجود ندارند مختصات نقاط M و M' بترتیب عبارتند از:

$M(x=2, y=0)$ ، $M'(x=-2, y=0)$ و چون بروفق حالت دوم مواضع نقاط اصلیه را بیکدیگر وصل کنیم منحنی نمایش تغییرات تابع y بدست میآید

مثال ۳ - منحنی نمایش تغییرات سه جمله دو مجذوری $y = 4x^4 - 17x^2 + 4$ را رسم کنید



ش ۷

مقدار $\frac{b}{2a}$ منفی و مساویست با $-\frac{17}{8}$ پس چون مانند مثال ۲ عمل کنیم می بینیم که علاوه بر نقاط M و M' نقاط N و N' نیز موجود میباشند زیرا که معادله دو مجذوری

$$4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$$

دارای چهار ریشه حقیقی ۲ + و ۲ - و $\frac{1}{2}$ + و $\frac{1}{2}$ - است حال مواضع نقاط اصلیه A و A' و A'' و M و M' و N و N' را نسبت بمحورهای مختصات معین نموده و منحنی نمایش تغییرات سه جمله مفروض را رسم میکنیم

امثله

۲۸ - منحنی نمایش تغییرات سه جمله های دو مجذوری ذیل را رسم کنید

$y = 3x^4 + 2x^2 - 1$ و $y = 3x^4 - 2x - 1$

$y = -2x^4 + 3x^2 - 1$ و $y = -2x^4 - 3x^2 - 1$

$y = x^4 - 3x^2 + 2$ و $y = -x^4 - 3x^2 - 2$

فصل نهم

مسائل درجه دوم

۱۱ - همانطوریکه در (نمره ۲۴ جلد دوم) یادآوری نمودیم مجدداً بخاطر میآوریم که حل هر مسئله شامل چهار عمل اصلی ذیل میباشد

اولاً - انتخاب مجهول یا مجهولات مسئله

ثانیاً - نقل صورت مسئله بصورت معادله

ثالثاً - حل معادله یا معادلات مسئله

رابعاً - بحث در مسئله

مقصود عمده ما از مسائل درجه دومی که در این فصل بعنوان نمونه و مشق حل میکنیم توضیح قسمت رابعاً یعنی بحث در مسائل میباشد

مسئله ۱ - شخصی مقداری پارچه خرید بمبلغ ۷۲ قران مطلوبست تعیین طول پارچه درصورتیکه بدانیم اگر در هر متری سه قران باو تخفیف داده میشد چهار متر بر طول پارچه اضافه میگشت

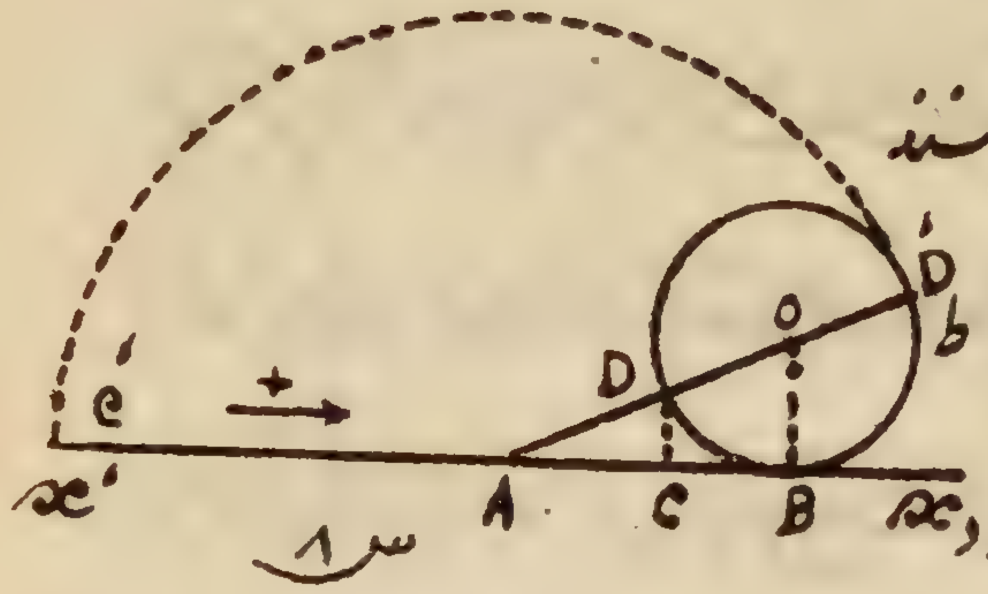
چون طول مجهول پارچه را x فرض کنیم قیمت یک مترش مساویست با $\frac{72}{x}$ و بر حسب

فرض مسئله باید تساوی ذیل محقق باشد $(x+4)(\frac{72}{x}-3)=72$ (۱)
تساوی (۱) معادلهٔ یک مجهولی درجهٔ دومی است از x که پس از حذف مخرج و پرانتزها
ونقل جمل بطرف اول بصورت ذیل درمیآید $3x^2+12x-288=0$
ویا بصورت $x^2+4x-96=0$ (۲) ریشه‌های معادله (۲) عبارتند
از $x=8$ و $x=-12$ باید دانست که عدد منفی ۱۲- در فرض مسئله صدق
نمیکند و فقط ریشه ایست از معادله (۱) وتنها جواب مسئله همان عدد ۸ میباشد

مسئله ۲ - (تقسیم خطی بر نسبت ذات وسط وطرفین) - در روی
خط غیر محدود x'x نقطه تعیین کنید که قطعه خط $\overline{AB}=a$ از
خط غیر محدود x'x را بدو جزو چنان تقسیم کند که یکی واسطه
هندسی باشد مابین AB و جزو دیگر

چون در روی x'x جهة A به B را جهة مثبت اختیار نمائیم می‌بینیم که هر کجا
باشد موضع نقطه مطلوب C نسبت بنقاط A و B همیشه مابین قطعات $\overline{AB}$
و $\overline{BC}$ و $\overline{CA}$ رابطهٔ ذیل محقق است $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=0$
(رابطهٔ شال) ویا $\overline{CB}=\overline{CA}+\overline{AB}$ حال اگر مقدار $\overline{AC}$ را به x
بنمائیم رابطهٔ فوق را میتوان چنین نوشت $\overline{CB}=a-x$ و آنوقت برحسب

فرض مسئله معادلهٔ ذیل را خواهیم داشت $x^2=a(a-x)$ (۱) ویا پس از
حذف پرانتز ونقل جمل بطرف اول $x^2+ax-a^2=0$ اینمعادله دارای
دو ریشه حقیقی ومتمایز ومختلف العلامه است که عبارتند از $x'=\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)$ و
$x''=-\frac{a}{2}(\sqrt{5}+1)$ چنانکه ملاحظه میشود ریشهٔ اول x' مثبت وکوچکتر از a است
بنابراین نقطهٔ C واقعست مابین A و B وریشه ثانی x'' منفی وبحسب قدر مطلق
از a بزرگتر است بنابراین نقطهٔ C' واقع است
درسمت چپ نقطهٔ A دراینحالت ریشه‌های
x' و x'' هردو در فرض مسئله صدق میکنند
میتوان بطریق هندسی هم مواضع نقاط
C و C' را در روی x'x معین نمود



بدینطریق که از نقطهٔ B عمودی بر x'x اخراج نموده وطول BO را مساوی $\frac{a}{2}$
جدا نموده وآنوقت دایرهٔ مرسومه بشعاع OB قطع میکند خط AO را در نقاط
D و D' بطریقی که $AD=AC=x'$ و $\overline{AD'}=\overline{AC'}=x''$

مسئله ۳ - مخروط مستدیر القاعده بشعاع R وبارتفاع H
مفروض است مطلوب است تعیین مقداری که چون آنرا بر R

اضافه کرده واز H نقصان نمائیم حجم مخروط تغییر نکند
مقدار مطلوب x اعم از آنکه مثبت یا منفی باشد باید در رابطهٔ ذیل صدق کند

$$\frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi (R+x)^2 (H-x)$$

ویا $R^2 H = (R+x)^2 (H-x)$ ویا $x^3 - (H-2R)x^2 - R(2H-R)x = 0$

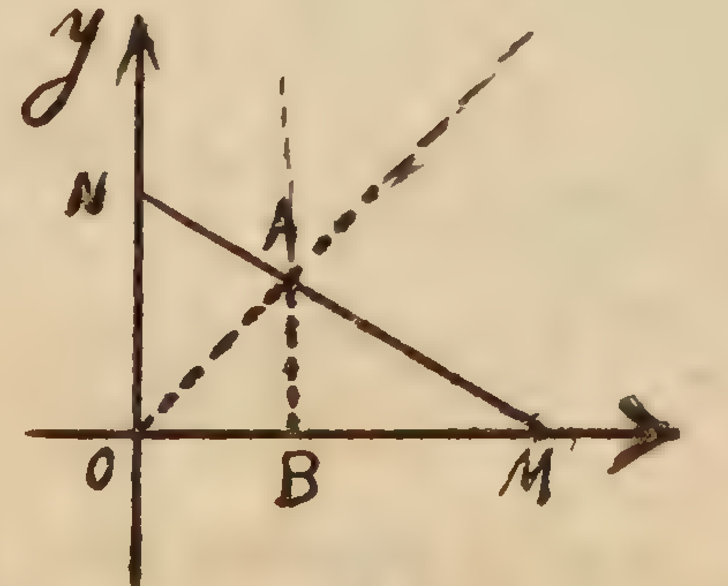
حال چون طرفین معادله فوق را به x تقسیم نمائیم یعنی ریشهٔ صفرش را از آن جدا کنیم معادله درجه دوم ذیل حاصل میشود .

$$(1)\quad f(x) = x^2 - (H-2R)x - R(2H-R) = 0$$

بحث ـ برای اینکه یکی از ریشه های معادله (۱) در فرض مسئله صدق کند میبایستی که اگر آن ریشه مثبت است از H کوچکتر واگر منفی است از R ـ بزرگتر باشد پس شرایطی را که باید ریشه مفروضه دارا باشند عبارتند از $H > x > -R$
بنابراین برای اینکه مسئله دارای یک جواب باشد لازم وکافی است که نامساوی ذیل محقق باشد $f(-R)\, f(H) < 0$ (۲) زیرا که از این نامساوی میتوان بسهولت استنباط کرد که اولاً معادله (۱) دارای دو ریشه حقیقی است وثانیاً یکی از دو ریشه واقع است مابین R ـ و H وچون $f(-R) = -RH$ و $f(H) = R^2$ پس نامساوی (۲) همیشه محقق بوده ومسئله بدون هیچ شرطی

همیشه دارای یک جواب میباشد وآن عبارت است از ریشه بزرگتر معادله (۱) زیرا بواسطهٔ مثبت بودن ضریب جملهٔ درجهٔ دوم ومنفی بودن $f(-R)$ عدد R ـ واقع است مابین دو ریشه یعنی $x'' > -R > x'$ مقدار x'' از روی معادله (۱) عبارت است از $x = \frac{H-2R+\sqrt{H(H+4R)}}{2}$
وبرحسب آنکه 2H بزرگتر یا کوچکتر از R باشد مقدار x'' مثبت یا منفی است

مسئله ۴ ـ (مسئله پاپوس) نقطهٔ مانند A در روی خط منصف زاویه قائمه xOy مفروض است میخواهند از نقطه مفروضه A خطی چنان مرور دهند که طول قطعهٔ از آن محصور مابین Ox و Oy مساوی با طول معلوم l باشد
چون فاصلهٔ نقطهٔ A را از ضلعین زاویه xOy به a بنمائیم از مثلث قائم الزاویه OMN میتوان چنین داشت



ش ۹

$$(1)\quad (a+x)^2 + \overline{ON}^2 = l^2$$

حال برای تعیین ON از تشابه مثلثات قائم الزاویه MON و MBA میتوان رابطهٔ ذیل را نوشت $\frac{ON}{BA} = \frac{OM}{BM}$ ویا $\frac{ON}{a} = \frac{a+x}{x}$

پس $\overline{ON}^2 = \frac{a^2(a+x)^2}{x^2}$ وچون در تساوی (۱) بجای $\overline{ON}^2$ مساویش را قرار دهیم حاصل میشود

$$(a+x)^2 + \frac{a^2(a+x)^2}{x^2} = l^2 \quad (۲)$$

حال معادلهٔ (۱) را مستقیماً بصورت ذیل مینویسیم

$$x^2 + 2ax + 2a^2 + \frac{2a^3}{x} + \frac{a^4}{x^2} = l^2$$

ویا

$$\left(x^2 + 2a^2 + \frac{a^4}{x^2}\right) + 2a\left(x + \frac{a^2}{x}\right) = l^2$$

ویا

$$\left(x + \frac{a^2}{x}\right)^2 + 2a\left(x + \frac{a^2}{x}\right) - l^2 = 0 \quad (۳)$$

برای حل معادلهٔ (۳) مجهول معاونی مانند y بطریقی اختیار مینمائیم که $y = x + \frac{a^2}{x}$ (۴) وآنوقت حل معادلهٔ (۳) وبنابراین حل معادلهٔ (۲) راجع میشود بحل معادلات (۴) و (۵) $y^2 + 2ay - l^2 = 0$

بحث ـ برای اینکه مسئله دارای یک یا چندین جواب باشد میبایستی که بازاء ریشه‌های حقیقی معادله (۵) معادله (۴) دارای ریشه‌های حقیقی باشد و شرط حقیقی بودن ریشه‌های معادله (۴) اینست که $y^2 - 4a^2 \geq 0$ ویا $y^2 \geq 4a^2$ ویا $|y| \geq |2a|$ حال میبایستی ریشه‌های حقیقی معادله (۵) را با $2a$ مقایسه نمود و تحقیق کرد درچه صورت یکی یا هردو بحسب قدر مطلق بزرگتر از $2a$ یا یکی مساوی $2a$ میباشد اگر نتیجه تبدیل y به $2a$ در معادله (۵) منفی باشد یعنی $f(2a) = 4a^2 + 4a^2 - l^2 < 0$

ویا $l^2 > 8a^2$ ویا $l > 2a\sqrt{2}$ درانصورت $2a$ واقع میشود مابین ریشه‌های معادلهٔ (۵) یعنی $y'' < 2a < y'$ پس بازاء ریشهٔ مثبت y' که بزرگتر است از $2a$ معادله (۴) دارای دو ریشهٔ حقیقی است و بازاء y'' نیز که بحسب قدر مطلق بزرگتر است از $2a$ (وقتیکه ریشهٔ مثبت معادله (۵) بزرگتر از $2a$ باشد واضح است که بروفق رابطه $y' + y'' = -2a$ میبایستی ریشهٔ منفی آن نیز بحسب قدر مطلق بزرگتر از $2a$ باشد) معادله (۴) دارای دو ریشهٔ حقیقی بود و بنابراین مسئله درانحالت دارای چهار جواب میباشد

واگر $f(2a)$ در معادله (۵) مثبت باشد یعنی $f(2a) = 8a^2 - l^2 > 0$ ویا $l < 2a\sqrt{2}$ درانصورت ریشه‌های معادله (۵) یا هردو بزرگترند از $2a$ یا کوچکتر از $2a$ میباشند و چون $-\frac{b}{2a} = -a < 2a$ بنابراین بروفق (نمرهٔ ۶) هردو ریشه کوچکتر از $2a$ میباشند یعنی $y'' < y' < 2a$ پس فقط بازاء ریشهٔ منفی y'' که بحسب قدر مطلق بزرگتر است از $2a$ (چون y' مثبت و کوچکتر است از $2a$ پس بروفق رابطه $y' + y'' = -2a$ میبایستی که قدر مطلق y'' بزرگتر از $2a$ باشد) معادله (۴) دارای دو ریشهٔ حقیقی بوده و بنابراین مسئله درانحالت فقط دارای دو جواب میباشد

و بالاخره اگر $f(2a)$ در معادله (۵) مساوی صفر باشد یعنی $f(2a) = 8a^2 - l^2 = 0$ ویا $l = 2a\sqrt{2}$ واضح است که در این حالت ریشهٔ مثبت معادله (۵) خود $2a$ است و بر وفق رابطه $y' + y'' = -2a$ ریشهٔ منفی y'' بحسب قدر مطلق بزرگتر است از $2a$ پس بازاء $2a$ معادله (۴) دارای یک ریشهٔ مضاعف است و بازاء y'' دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز میباشد بنابراین در این صورت مسئله دارای یک جواب مضاعف و دو جواب متمایز میباشد پس بطور خلاصه میتوان گفت که

اگر $l > 2a\sqrt{2}$ مسئله دارای چهار جواب است

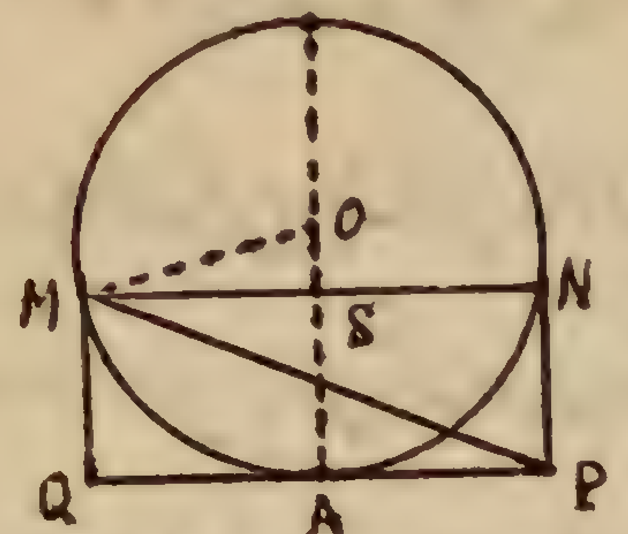
واگر $l < 2a\sqrt{2}$ مسئله دارای دو جواب است

واگر $l = 2a\sqrt{2}$ مسئله دارای سه جواب میباشد (یکی مضاعف است)

مسئلهٔ ۵ - در نقطهٔ A خطی بر دایرهٔ مفروضهٔ O مماس میکنیم مطلوب است موضع وتر MN بطریقی که قطر MP مربع مستطیل $MNPQ$ دارای طول معین l باشد

واضح است که اگر فاصلهٔ AS در دست باشد میتوان بسهولت وتر MN را رسم نمود پس اگر فاصلهٔ AS را مجهول مسئله انتخاب نمائیم از روابط هندسی ذیل

میتوان معادله مسئله را تعیین نمود از این قرار ابتدا در مثلث قائم الزاویه MPQ این رابطه محقق است $\overline{MQ}^2 = \overline{MP}^2 - \overline{QP}^2$



ش ۱۰

ویا (۱) $x^2 = l^2 - \overline{QP}^2$

وهمچنین در مثلث قائم الزاویه OMS میتوان چنین داشت $\overline{OM}^2 = \overline{MS}^2 + \overline{SO}^2$ ویا

$R^2 = \frac{\overline{QP}^2}{4} + (R - x)^2$ ویا $\overline{QP}^2 = 8Rx - 4x^2$

وچون در تساوی (۱) بجای $\overline{QP}^2$ مساویش را قرار دهیم حاصل میشود

$$3x^2 - 8Rx + l^2 = 0 \qquad (2)$$

بحث - برای اینکه یکی از ریشه‌های معادله $f(x) \equiv 3x^2 - 8Rx + l^2 = 0$ در مسئله صدق کند لازم و کافی است که آن ریشه مثبت و کوچکتر از $2R$ قطر دایره باشد پس برای اینکه مسئله اقلاً دارای یک جواب باشد لازم و کافیست که نامساوی ذیل محقق باشد $f(0) \times f(2R) < 0$ (۳) وچون $f(0) = l^2$ و $f(2R) = l^2 - 4R^2$ پس برای اینکه نامساوی (۳) محقق باشد میبایستی که $l^2(l^2 - 4R) < 0$ ویا $l < 2R$ واگر $2R > l$ باشد معلوم نیست که آیا معادله (۲) دارای ریشهٔ حقیقی است یا خیر اگر بخواهیم ریشه‌های مثبت

معادله (۲) هر دو در مسئله صدق کند میبایستی که $0 < x' < 2R$ و $0 < x'' < 2R$

یا $0 < x' + x'' < 4R$ و یا $0 < \frac{x' + x''}{2} < 2R$

و چون نصف مجموع ریشه‌های معادله (۲) یعنی $\frac{4R}{3}$ واقع است ما بین صفر و $2R$ بنابراین برای آنکه مسئله دارای دو جواب باشد کافیست که $f(\frac{4R}{3})$ منفی باشد و چون $f(\frac{4R}{3}) = l^2 - \frac{16}{3}R^2$ پس شرط اینکه مسئله دارای دو جواب باشد اینست که $l^2 - \frac{16}{3}R^2 < 0$ و یا $l \leqslant \frac{4\sqrt{3}}{3}R$

پس بطور خلاصه اگر $2R > l$ مسئله دارای یکجواب است و اگر $l \leqslant \frac{4\sqrt{3}}{3}R$ مسئله دارای دو جواب است

امثله

۳۹ - چوپانی چندین رأس گوسفند را بمبلغ ۷۵۰ قران خرید پس از مدتی پنج رأس تلف میشوند و بقیه را چوپان از قرار رأسی شش قران گرانتر از آنچه خریده بود فروخت و در این معامله سی قران ضرر کرد پس چند رأس گوسفند خریده بود

۴۰ - مبلغ چهارصد قران را میخواستند ما بین چند نفر بطور تساوی قسمت کنند در موقع تقسیم چهار نفر از سهم خودشان صرف نظر میکنند و در نتیجه بر سهام دیگران پنج قران اضافه گردید مطلوب است تعیین عده شرکاء

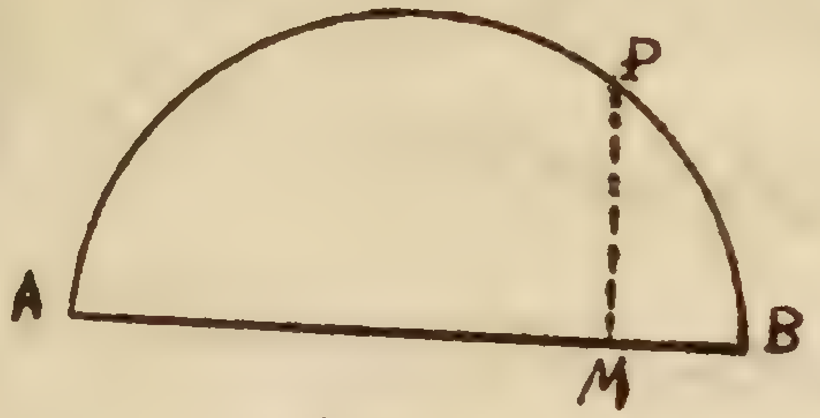
۴۱ - دو نفر در یک لحظه اوّلی از طهران و دوّمی از یکی قراء اطراف طهران بسمت یکدیگر حرکت کردند و در موقع ملاقات اوّلی باندازه دوازده کیلومتر زیادتر از دوّمی طیّ مسافت کرده بود پس از ملاقات اوّلی بعد از $4\frac{2}{3}$ ساعت بآن قریه و دوّمی بعد از $7\frac{5}{7}$ ساعت بطهران میرسد مطلوب است تعیین فاصلهٔ آن قریه از طهران

۴۲ - رودخانه ایست بطول دوازده کیلومتر کشتی در مدت چهار ساعت و دوازده دقیقه ابتدا در جهت جریان رودخانه پائین آمده و بعد در جهت مخالف جریان بالا رفته بنقطهٔ عزیمت خود میرسد مطلوب است تعیین سرعت کشتی در آب ساکن درصورتیکه بدانیم سرعت جریان رودخانه در ساعتی سه کیلومتر میباشد

۴۳ - برای اتمام کاری شخصی دو نفر عمله اجیر نمود اگر این دو نفر عمله باهم کار کنند در مدت شش ساعت آن کار تمام میشود و اگر نصف کار را یکی و نصف دیگرش را بعهدهٔ دوّمی محول کنند من حیث المجموع دوازده ساعت و نیم طول خواهد کشید پس هر کدام بتنهائی در مدت چند ساعت آن کار را بانجام میرسانند.

۴۴ - دو اتومبیل در یک لحظه از شهر A بطرف شهر B حرکت کردند سرعت اولی باندازهٔ چهار کیلومتر در ساعت از سرعت دومی زیادتر است و یکساعت و نیم قبل از دومی بشهر B میرسد مطلوبست تعیین سرعت هرکدام در صورتیکه بدانیم فاصلهٔ دو شهر A و B مساوی ۲۱۴٫۵ کیلومتر است

۴۵ - نیم دایره بقطر $AB = ۲R$ مفروض است مطلوب است تعیین موضع نقطه P بطریقیکه اگر P را در روی AB تصویر کنیم مابین قطعات AM و MP رابطهٔ ذیل محقق باشد



ش ۱۱

$AM + MP = \ell$ و

۴۶ - اشعهٔ دوایر محاطیه r و محیطیه R مثلث قائم الزاویه در دست اند مطلوب است محاسبهٔ اضلاع و سطح آن مثلث قائم الزاویه

۴۷ - مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین ABC مفروض است در روی اضلاع متساویهٔ AB و AC بترتیب مربع و مثلث متساوی الاضلاعی بنا نموده و دو راس مجاور دو شکل اخیر را بیکدیگر وصل مینمایند مطلوب است محاسبهٔ اضلاع مثلث مفروض بطریقی که سطح شکل کل مساوی m^2 باشد

مقاله اول

تصاعدات

فصل اول

تصاعدات حسابی

۱۲ - **تعریف** - تصاعد عددی یا تفاضلی رشته جملی است که هر جملهٔ آن مساوی است بجملهٔ ما قبلش باضافهٔ یکمقدار ثابتی که آن را قدر نسبت تصاعد میگویند مثلاً رشتهٔ جمل

۱ و ۲ و ۳ و ۴ و .... و n و $(n+1)$ و ....

۲ و ۷ و ۱۲ و ۱۷ و .... و n و $(n+5)$ و ....

۶ و ۳ و ۰ و ۳- و ۶- و .... و $n-$ و $(-n-3)$ و ....

عبارتند از تصاعدات عددی که قدر نسبتشان ۱ و ۵ و ۳- میباشد چنانکه می‌بینیم برحسب آنکه قدر نسبت مثبت یا منفی باشد جمل متوالیه تصاعد ترقی یا تنزل مینمایند در حالت اول تصاعد را صعودی و در صورت ثانی تصاعد را نزولی گویند

بطور کلی اگر مقادیر a و b و c و ..... و l جمل متوالیه یک تصاعد عددی باشند آنرا چنین مینمایند

$$\div\ a \cdot b \cdot c \cdot d \ldots\ldots\ldots\ l \ldots\ldots$$

یعنی ابتدا ÷ را که علامت تصاعد عددی است نوشته و بعد جمل متوالیه را بواسطه یک نقطه از یکدیگر مجزی نموده بتالی هم مینویسند

برحسب تعریف فوق اگر جمله اول و قدر نسبت یک تصاعد حسابی باشد میتوان جمل متوالیهٔ آن تصاعد را تشکیل داده و بطریق ذیل نمود

$$\div\ a \cdot a+r \cdot a+2r \cdot a+3r \ldots\ldots a+nr$$

۱۳ - **قضیه** - مقدار جملهٔ مرتبه n اُم - مقدار l جمله n اُم تصاعد عددی که جملهٔ اولش a و قدر نسبتش r باشد مساوی است با $l = a+(n-1)r$

برهان - هرگاه a جملهٔ اول و r قدر نسبت یک تصاعد حسابی باشد قبلاً دیده‌ایم که جملهٔ دوم آن تصاعد مساوی است با $a+r$ و جمله سوم $a+2r$ و جمله چهارم $a+3r$ است و هکذا یعنی هر جمله مساویست بجملهٔ اول باضافهٔ آنقدر مرتبه قدر نسبت که جمل ماقبل آن جمله واقعند بنابراین جمله مرتبه n ام مساویست با جملهٔ اول

باضافه $(n-1)$ مرتبه قدر نسبت پس $l = a + (n-1)r$

قضیه فوق را میتوان بطریق ذیل هم ثابت نمود تصاعد حسابی که قدر نسبت آن r باشد فرض میکنیم

$$\div\ a \cdot b \cdot c \ldots\ldots K \cdot l \ldots\ldots$$

فرض میکنیم که l جمله مرتبه n ام آن باشد برحسب تعریف تصاعد حسابی میتوان تساویهای ذیل را نوشت

$$\begin{cases} b = a + r \\ c = b + r \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ l = K + r \end{cases}$$

حال اگر این تساویها را عضو بعضو با یکدیگر جمع نموده و در ضمن هم از طرفین جمل مشترکه متحدالعلامه حذف کنیم حاصل میشود $l = a + r + r + r + r + \ldots\ldots r$

بدیهی است که عدهٔ rهای این تساوی برابر است بعده تساویهای فوق و چون برای نوشتن تساویهای مذکوره ما از جمله دوم تصاعد شروع نموده‌ایم بنابراین $(n-1)$ تساوی نوشته‌ایم پس عدهٔ rها مساویست با $(n-1)$ و بنابراین

$$(1)\quad l = a + (n-1)r$$

مثال ۱ - سلسلهٔ اعداد صحاح فرد تصاعد حسابی تشکیل میدهند که جمله اولش ۱ و قدر نسبتش مساوی است با ۲ مطلوب است مقدار جمله n اُم

اگر l نمایش جمله n ام باشد مقدار آن از روی دستور (۱) چنین خواهد بود

$l = 1 + (n-1)2 = 2n-1$ مثلاً مقدار جملهٔ ششم اینست $l = 2 \times 6 - 1 = 11$

مثال ۲ - سلسلهٔ اعداد صحاح زوج تصاعد حسابی تشکیل میدهند که جملهٔ اول و قدر نسبتش ۲ میباشد مطلوب است مقدار جملهٔ n اُم این تصاعد

اگر l نمایش جملهٔ n ام باشد مقدار آن از روی دستور (۱) مساویست با

$l = 2 + (n-1)2 = 2n$ مثلاً مقدار جملهٔ دهم اینست $l = 2 \times 10 = 20$

نتیجه - در هر تصاعد حسابی صعودی غیر محدود میتوان n را طوری انتخاب نمود که مقدار جملهٔ مرتبهٔ n ام از هر عدد مثبت A (آنقدر بزرگ که بخواهیم) بزرگتر گردد

برای اینکه جملهٔ مرتبهٔ n ام بزرگتر از A باشد کافیست چنین داشت $a + (n-1)r > A$

ویا $n - 1 > \frac{A-a}{r}$ ویا $n > 1 + \frac{A-a}{r}$

مثال - در تصاعد حسابی صعودی ذیل میبایستی n را بزرگتر از چه عددی انتخاب نمود تا آنکه مقدار جملهٔ n ام بزرگتر از ۱۰۰۳ باشد

÷ ۳ . ۷ . ۱۱ . ۱۵ . ۱۹ ......

بر وفق نتیجهٔ فوق میبایستی که مقدار n در نامساوی ذیل صدق کند

$n > 1 + \frac{1003-3}{4}$ ویا $n > 251$

۱۴ - مسئله - درج وسایط حسابی مابین دو عدد مفروض - درج

$(m-1)$ واسطهٔ عددی مابین دو عدد A و B عبارت از تشکیل یک تصاعد حسابی است که دارای $(m+1)$ جمله بوده بطریقی که A و B دو جملهٔ طرفین آن تصاعد باشند

اگر A را جملهٔ اول و B را جملهٔ آخر تصاعد مطلوب اختیار نمائیم بدیهی است که برای تشکیل آن کافی است که قدر نسبت r در دست باشد برای تعیین r رابطهٔ مبرهن ذیل را مینویسیم $B = A + mr$ ویا $r = \frac{B-A}{m}$

پس وسایط مطلوبه چنین خواهند بود

$A + \frac{B-A}{m}$, $A + 2\frac{B-A}{m}$, $A + 3\frac{B-A}{m}$, ... و $A + (m-1)\frac{B-A}{m}$

مثال - مابین دو عدد ۲۰ و ۱۰۸ و ۱۰ واسطهٔ حسابی درج کنید

قدر نسبت تصاعد مطلوب بر وفق دستور فوق چنین خواهد بود $r = \frac{108-20}{11} = 8$

پس وسایط مطلوبه بترتیب عبارتند از

۲۸ و ۳۶ و ۴۴ و ۵۲ و ۶۰ و ۶۸ و ۷۶ و ۸۴ و ۹۲ و ۱۰۰

که با دو عدد مفروض ۲۰ و ۱۰۸ تشکیل تصاعد ذیل را میدهند

÷ ۲۰ . ۲۸ . ۳۶ . ۴۴ . ۵۲ . ۶۰ . ۶۸ . ۷۶ . ۸۴ . ۹۲ . ۱۰۰ . ۱۰۸

نتیجه ۱ - میتوان مابین دو عدد مفروض A و B آنقدر وسایط

حسابی درج کرد که قدر نسبت تصاعد از هر عدد مثبت بسیار کوچکی کوچکتر گردد

زیرا که قدر نسبت مذکور عبارت است از خارج قسمت مقدار ثابت $B - A$ بر m پس اگر m بسیار بزرگ باشد خارج قسمت $\frac{B-A}{m} = r$ بی اندازه کوچک شده میل میکند بسمت صفر بنابراین ممکن است که این خارج قسمت بازاء یک مقدار مشخصی از m از هر عدد مثبت کوچکی (آنقدر کوچک که بخواهیم) کوچکتر شود

نتیجهٔ ۲ - هرگاه مابین جمل متوالیه تصاعد حسابی $\div a . b . c . d ......$ یک عدهٔ معین وسائط عددی درج کنیم وسایط مندرجه با جمل تصاعد مفروض تشکیل یک تصاعد اتصالی میدهند

زیرا اگر r قدر نسبت تصاعد مفروض باشد و بخواهیم مابین هر دو جملهٔ متوالیه (a و b) و (b و c) و (c و d) وغیره مثلاً $(m - 1)$ واسطه حسابی درج کنیم قدر نسبتهای تصاعدات جدیده چنین خواهند بود

$r' = \frac{b-a}{m} = \frac{r}{m}$ ، $r'' = \frac{c-b}{m} = \frac{r}{m}$ و $r''' = \frac{d-c}{m} = \frac{r}{m}$

چنانکه می بینیم قدر نسبتهای r' و r'' و r''' متساویند و علاوه براین چون

در هر یک از تصاعدات جزئیه جملهٔ اول عبارت است از جملهٔ آخر تصاعد قبل و جملهٔ آخر مساویست با جملهٔ اول تصاعد بعد پس اگر تمام آنها را بتالی یکدیگر بنویسیم تصاعد حسابی اتصالی تشکیل میشود که قدر نسبتش همان قدر نسبت مشترک تصاعدات جزئیه یعنی $\frac{r}{m}$ میباشد

نتیجهٔ ۳ - هرگاه مابین دو عدد مفروض A و B متوالیاً $(m - 1)$ و $(m' - 1)$ و $(m'' - 1)$ و ..... واسطهٔ حسابی درج کنیم جمیع وسایط مندرجهٔ مختلفه جمل یک تصاعد عددی میباشند

زیرا فرض مینمائیم که مابین A و B بترتیب $(m - 1)$ و $(m' - 1)$ واسطهٔ حسابی درج کرده باشیم قدر نسبتهایشان چنین خواهند بود

$r = \frac{B-A}{m}$ و $r' = \frac{B-A}{m'}$ و یا $r = \frac{m'(B-A)}{mm'}$ و $r' = \frac{m(B-A)}{mm'}$

حال جملهٔ مرتبهٔ $(K+1)$ تصاعد اول و جملهٔ مرتبهٔ $(K'+1)$ تصاعد دوم را میتوان چنین نوشت

$A + Km'\frac{B-A}{mm'}$ و $A + K'm\frac{B-A}{mm'}$

وبسهولت میتوان دید که اگر مابین A و B یک عدهٔ وسایطی مساوی $mm' - 1$ درج کنیم دو جملهٔ مزبور جمل نمرهٔ Km' و $K'm$ وسایط جدید بوده و بنابراین

جمل مختلفه یک تصاعد میباشد

۱۵- قضیهٔ ۲- در هر تصاعد حسابی محدود مجموع هر دو جملهٔ متساوی البُعد از طرفین مقداری است ثابت و مساوی است با مجموع دو جملهٔ طرفین.

برهان - تصاعد حسابی ذیل را که قدر نسبتش r و عدهٔ جملش m است فرض مینمائیم $\div a . b . c \ldots\ldots x \ldots y \ldots h . k . l$

و فرض میکنیم x و y دو جمله باشند که n جمله قبل از x و n جمله بعد از y واقع باشند میخواهیم ثابت کنیم که $x + y = a + l$

مقدار x را که جملهٔ مرتبهٔ $(n+1)$ است میتوان چنین نوشت $(1)\ x = a + nr$

برای تعیین مقدار y فرض میکنیم که تصاعد مفروض از y شروع شده و به l تمام شود در اینصورت مقدار l را میتوان بصورت ذیل نوشت $l = y + nr$

و بنابراین $(2)\ y = l - nr$ حال اگر تساویهای (۱) و (۲) را عضو بعضو بایکدیگر جمع نمائیم حاصل میشود $x + y = a + l$

تبصرة - هرگاه عدهٔ جمل تصاعد فرد باشد جملهٔ وسط مساوی است به نصف مجموع دو جملهٔ طرفین

فرض میکنیم در تصاعد $\div a . b . c \ldots x \ldots h . k . l$ x جمله‌ئی باشد که n جمله قبل از آن و n جمله بعد از آن واقع باشند اگر r قدر نسبت تصاعد مفروض باشد مقدار x را میتوان چنین نوشت $(1)\ x = a + nr$ و همچنین $l = x + nr$ و بنابراین $(2)\ x = l - nr$ حال اگر دو تساوی (۱) و (۲) را بایکدیگر جمع کنیم حاصل میشود $2x = a + l$

و یا $x = \frac{a+l}{2}$

قضیهٔ ۳- حاصل جمع هر تصاعد حسابی محدود مساوی است بحاصل ضرب عدهٔ جمل در نصف مجموع دو جملهٔ طرفین

تصاعد حسابی که جملهٔ اولش a و جملهٔ آخرش l و عدهٔ جملش n باشد فرض مینمائیم $\div a . b . c . d \ldots\ldots g . h . k . l$

اگر مجموع جملش را به S بنامیم چنین خواهیم داشت

$$(1)\ S = a + b + c + d + \cdots + g + h + k + l$$

و چون در تساوی (۱) مکان جمل را تغییر داده و از جملهٔ آخر شروع کنیم حاصل میشود

$$(2)\ S = l + k + h + g + \cdots + d + c + b + a$$

حال دو تساوی (۱) و (۲) را عضو بعضو بایکدیگر جمع میکنیم

$$2S = (a+l)+(b+k)+(c+h)+(d+g)+\cdots+(g+d)+(h+c)+(k+b)+(l+a)$$

و چون بر دو فرض تصفیه ۲ مقدار هر یک از پرانتزهای رابطه فوق مساوی است با $a + l$ علاوه بر این چون رابطه فوق شامل n پرانتز است پس

$$(3)\quad S = n \times \frac{a+l}{2} \qquad \text{و یا} \qquad 2S = (a+l)\times n$$

اگر در دستور فوق بجای l مقدارش $a + (n-1)r$ را قرار دهیم دستور ذیل بدست میآید

$$(4)\quad S = \frac{[2a+(n-1)r]\,n}{2}$$

مثال ۱ - سلسله اعداد صحاح تصاعد حسابی تشکیل میدهند که جمله اول و قدر نسبتش ۱ میباشد مطلوب است حاصل جمع n جمله اول آن

چون در دستور (۴) بجای حروف مقادیرشان را قرار دهیم حاصل میشود

$$S = n \times \frac{2\times1 + (n-1)\times1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

مثلاً حاصل جمع هشتاد جمله اول آن مساوی است با

$$S = \frac{80(80+1)}{2} = 3240$$

مثال ۲ - سلسله اعداد صحاح فرد تصاعد عددی تشکیل میدهند که جمله اول آن ۱ و قدر نسبتش ۲ میباشد مطلوب است حاصل جمع n جمله اول آن تصاعد

از دستور (۴) میتوان چنین داشت: $S = n \times \frac{2+(n-1)2}{2} = n^2$

مثلاً حاصل جمع هشت جمله اول آن مساوی است با $S = 8^2 = 64$

مثال ۳ - سلسله اعداد صحاح زوج تصاعد حسابی تشکیل میدهند که جمله اول و قدر نسبتش ۲ میباشد مطلوب است تعیین حاصل جمع n جمله اول آن تصاعد

چون در دستور (۴) بجای حروف مقادیرشان را قرار دهیم حاصل میشود

$$S = n \times \frac{2\times2 + (n-1)2}{2} = n(n+1)$$

مثلاً حاصل جمع نه جمله اول آن مساوی است با $S = 9(9+1) = 90$

مسئله — مطلوب است مجموع قوای متشابه جمل یک تصاعد حسابی محدود

تصاعد حسابی محدود ذیل را که قدر نسبتش r و عده جملش n است فرض مینمائیم

$$\div\ a \cdot b \cdot c \cdots h \cdot k \cdot l$$

و فرض میکنیم که ابتدا مقصود تعیین مجموع مربعات جمل تصاعد مفروض یعنی

$$S_2 = a^2 + b^2 + c^2 + \cdots + h^2 + k^2 + l^2$$

باشد بجهة این عمل ابتدا تساوی معتبر ذیل را مینویسیم

$$(i+r)^3 = i^3 + 3i^2r + 3ir^2 + r^3$$

و حال در این تساوی بجای i مرتباً جمل تصاعد مفروض را قرار میدهیم تا حاصل شوند

$$(a+r)^3 = a^3 + 3a^2r + 3ar^2 + r^3$$
$$(b+r)^3 = b^3 + 3b^2r + 3br^2 + r^3$$
....

....
$$(k+r)^3 = k^3 + 3k^2r + 3kr^2 + r^3$$
$$(l+r)^3 = l^3 + 3l^2r + 3lr^2 + r^3$$

چون تساویهای فوق را عضو بعضو با یکدیگر جمع نموده و از طرفین جمل مشترکه متحد الاسم را حذف کنیم حاصل میشود $(l+r)^3 = a^3 + 3rS_2 + 3r^2S + nr^3$

و چون بجای S مساویش $\frac{n(a+l)}{2}$ را قرار دهیم مقدار S_2 چنین بدست خواهد آمد

$$(1) \qquad S_2 = \frac{(l+r)^3 - a^3 - 3r^2 \times \frac{n(a+l)}{2} - nr^3}{3r}$$

همچنین اگر دو جملهٔ $(r+i)$ را بقوهٔ چهار رسانیده و در حاصل مانند فوق بجای i مرتباً جمل تصاعد را قرار دهیم و عمل جمع را بجا آوریم مقدار S_3 یعنی حاصل جمع مکعبات جمل تصاعد بدست میآید

$$(2) \qquad (l+r)^4 = a^4 + 4rS_3 + 6r^2S_2 + 4r^3S_1 + nr^4$$

بطور کلی اگر S_1 و S_2 و S_3 و ... و S_{n-1} در دست باشند میتوان بطریق مذکور فوق مقدار S_n یعنی $a^n + b^n + c^n + \dots + k^n + l^n$ را بدست آورد

مثال ۱ - مطلوبست مجموع مجذورات n عدد صحیح اول ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ....

قبلاً دیده ایم که سلسلهٔ اعداد صحاح تصاعد حسابی تشکیل میدهند که در آن $a = 1$ و $r = 1$ و $l = n$ و $S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$ و چون این مقادیر را در دستور (۱) ببریم حاصل میشود

$$S_2 = \frac{(n+1)^3 - 1 - 3\frac{n(n+1)}{2} - n}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

مثال ۲ - مطلوب است مجموع مکعبات n عدد صحیح اول ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ....

چون مانند مثال ۱ در رابطهٔ (۲) بجای a و r و l و S_1 و S_2 مقادیرشانرا قرار دهیم حاصل میشود $S_3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = S_1^2$

یعنی مجموع مکعبات n عدد صحیح اول ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ... مساویست با مجذور مجموع آنها

تبصره - جمیع مسائل راجعه بتصاعدات عددی باعانت دو دستور $\left\{\begin{array}{l} l = a + (n-1)r \\ S = \frac{n(a+l)}{2} \end{array}\right.$ حل میشوند و بر متعلمین است که دستورهای مذکوره را بخاطر سپرده فراموش ننمایند

چنانکه می بینیم دو دستور فوق شامل پنج مقدار a و l و r و n و S میباشند و اگر سه عدد از این مقادیر پنجگانه در دست باشد میتوان دو عدد دیگر را از روی دستورهای فوق حساب نمود پس اگر مقادیر a و l و r و n و S را بطریق ممکنه دو بدو بعنوان مجهول اختیار نمایند میتوان ده مسئله

مختلف طرح نمود که هشت عدد از آنها از درجهٔ اول و دو عدد دیگر که درینها (a و n) و (l و n) مجهول میباشند از درجهٔ دویم اند

مثال ۱ - جملهٔ اول و جملهٔ آخر و حاصل جمع جمل تصاعد حسابی بترتیب عبارتند از ۷- و ۲۰۳ و ۴۲۱۴ مطلوب است قدر نسبت و عدهٔ جمل آن تصاعد

بر وفق دستورهای مذکوره میتوان چنین داشت

$$\begin{cases} 203 = -7 + (n-1)\, r \\ 4214 = n \times \frac{-7+203}{2} \end{cases}$$

چون از رابطهٔ دوم n را تعیین کنیم $n = \frac{2 \times 4214}{196} = 43$ و بعد در رابطهٔ اول بجای n مقدارش را قرار دهیم حاصل میشود $r = \frac{203+7}{42} = 5$

مثال ۲ - مطلوب است عدهٔ جمل تصاعد حسابی که جملهٔ اولش ۱۲ و قدر نسبتش ۳ و مجموع جملش ۸۸۲ میباشد

چون در دستور مذکور فوق بجای حروف مقادیر عددیه شان را قرار دهیم حاصل میشود

$$\begin{cases} l = 12 + (n-1) \times 3 \\ 882 = n \times \frac{12+l}{2} \end{cases}$$

برای حل این دستگاه در رابطهٔ دویم بجای l مقدارش $12+(n-1)\times 3$ را قرار میدهیم $2 \times 882 = n\left[12 + 12 + (n-1)\times 3\right]$

و یا پس از اختصارات ممکنه $n^2 + 7n^2 - 588 = 0$ واضح و بدیهی است

که مقدار مطلوب n میبایستی صحیح و مثبت باشد بنابراین ریشهٔ صحیح و مثبت معادلهٔ درجهٔ دوم فوق مسئله صدق مینماید و بس پس $n = \frac{-7+\sqrt{49+2352}}{2} = 21$

امثله

۴۸ - در تصاعد عددی مقادیر l و r و s بترتیب برابرند با ۱۸ و ۲ و ۸۲ مطلوب است محاسبهٔ a و n

۴۹ - زوایای مثلث قائم الزاویه عبارتند از سه جملهٔ متوالی یک تصاعد عددی مطلوب است محاسبهٔ زوایای آن مثلث

۵۰ - مجموع چند جمله از تصاعد حسابی ÷ ۴ . ۷ . ۱۰ ...... مساوی است با ۶۰۵۰۰

۵۱ - محیط مثلث قائم الزاویه مساویست با ۲۴ متر مطلوب است محاسبهٔ اضلاع آن مثلث در صورتیکه بدانیم سه زاویهٔ آن جمل متوالیهٔ یک تصاعد حسابی میباشند

۵۲ - زوایای کثیر الاضلاع محدبی تشکیل تصاعد عددی میدهند که قدر نسبتش ۴ است و مقدار بزرگترین زاویهٔ آنهم ۱۷۲ درجه میباشد مطلوب است عدهٔ اضلاع کثیر الاضلاع مفروض

۵۳ - صاحب منصبی فرمانده ۳۰۰۳ نفر نظامی است میخواهد صفی تشکیل دهد بشکل مثلث بدین طریق که ردیف اول شامل یکنفر نظامی و ردیف دوم شامل دو نفر و در ردیف سوم شامل سه نفر نظامی باشد و هکذا تعیین کنید که چند ردیف پشت سر یکدیگر قرار خواهند گرفت

۵۴ - هرم مثلث القاعده (مثلث متساوی الاضلاع) از گلوله های توپ تشکیل داده اند در صورتیکه بدانیم در امتداد هر یک از اضلاع قاعده n گلوله قرار گرفته است مطلوب است تعیین عدهٔ گلوله هائیکه هرم مفروض را تشکیل میدهند

۵۵ - پنج عدد تعیین کنید که جمل متوالیه یک تصاعد حسابی باشند درصورتیکه حاصل جمع آنها مساوی پنج و حاصل ضربشان ۴۵ میباشد

۵۶ - باغبانی برای آبیاری کردن سی درخت که درطول یکی ازخیابانهای باغ بفاصله شش متر ازیکدیگر غرس شده اند ازحوضی که بفاصله ده متر از درخت اول قرار گرفته است آب برمیدارد تعیین کنید که بعد از انجام این خدمت چند متر راه پیموده است

۵۷ - حاصلجمع جملهٔ دوم و جملهٔ هفتم تصاعد حسابی مساویست با ۹۲ و همچنین مجموع جملهٔ چهارم و یازدهم آن تصاعد مساوی ۷۱ است مطلوبست تعیین مقادیر آن جمل

۵۸ - سیگارفروشی محض جلب مشتری هرمی از سیگار بنا نمود بدینطریق که ابتدا صد عدد سیگار پهلوی یکدیگر قرار داد بعد روی آنها متوالیاً طبقه بطبقه سیگار گذاشته تا طبقهٔ فوقانی آخر که فقط شامل یک سیگار است رسیده مطلوبست اولاً تعیین عدهٔ طبقات ثانیاً مجموع سیگارها

۵۹ - مطلوبست محاسبهٔ مقدار x بطریقی که مربعات عبارات $(x+1)$ و $(x+q)$ و $(x+q^2)$ جمل متوالیه یک تصاعد حسابی باشند

۶۰ - رشتهٔ جمل ۱ و ۳ و ۶ و ۱۰ و ۱۵ و ... که در آن $x_n = x_{n-1} + n$ میباشد مفروض است مطلوبست اولاً محاسبهٔ x_n از روی n ثانیاً محاسبهٔ مجموع n جملهٔ اول آن ثالثاً محاسبهٔ مجموع مربعات n جملهٔ اول رشتهٔ جمل مفروض

فصل دوم

تصاعدات هندسی

۱۸ - **تعریف** - تصاعد هندسی عبارت از رشتهٔ جملی است که هر جملهٔ آن مساوی است بجملهٔ ماقبل خودش ضرب در یک مقدار ثابتی که آنرا **قدر نسبت تصاعد** میگویند

و باید دانست که همیشه در تصاعد هندسی قدر نسبت را مثبت اختیار مینمایند

مثلاً رشتهٔ جمل ۱ و ۵ و ۲۵ و ۱۲۵ و ۶۲۵ و ...... و $5 \times n$ و ...

و $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{8}$ و ...... و $\frac{1}{2} \times n$ و .... عبارتند از تصاعدات هندسی که در اولی قدر نسبت ۵ و در دومی قدر نسبت $\frac{1}{2}$ میباشد

بطور کلی تصاعد هندسی را که جملهٔ اولش a و قدر نسبتش q باشد میتوان چنین نمود:

$$\div\div\ a : aq : aq^2 : aq^3 : \cdots\cdots aq^{n-1} : aq^n : \cdot$$

یعنی ابتدا $\div\div$ را که علامت تصاعدات هندسی است نوشته و بعد جمل متوالیه را از روی تعریف تصاعد هندسی معین نموده پشت سر یکدیگر قرار میدهیم و هر دو جملهٔ متوالیه را بواسطهٔ دو نقطه از هم جدا مینمائیم

مقادیر a (جملهٔ اول) و q (قدر نسبت) چونکه مثبت اند پس حاصل ضرب $a \times q$

بزرگتر یا کوچکتر است از a بر حسب آنکه q بزرگتر یا کوچکتر از واحد باشد بنابراین تصاعد هندسی صعودی خواهد بود وقتیکه قدر نسبت q بزرگتر از واحد باشد و نزولی است وقتی که قدر نسبت q کوچکتر از واحد باشد

۱۹ - **قضیهٔ ۱** - **مقدار جملهٔ n اُم** - هرگاه a و q نمایش جملهٔ اول و قدر نسبت یک تصاعد هندسی باشند مقدار l جملهٔ مرتبهٔ n ام همان تصاعد مساوی است با $l = aq^{n-1}$

برهان - بر حسب تعریف تصاعدات هندسی هرگاه a و q جملهٔ اول و قدر نسبت یک تصاعد هندسی باشند مقدار جملهٔ دوم مساویست با $a \times q$ و جملهٔ سیم با $a \times q^2$ و جملهٔ چهارم با $a \times q^3$ یعنی هر جمله مساویست بحاصل ضرب جملهٔ اول در قوتی از قدر نسبت که نمایندهٔ آن عده جمل ماقبل جملهٔ مطلوب باشد بنابراین بطور کلی مقدار جملهٔ مرتبهٔ n ام چنین خواهد بود

$$l = aq^{n-1} \quad (1)$$

از رابطهٔ (۱) میتوان استنباط نمود که اگر q بزرگتر از واحد باشد جمل متوالیهٔ تصاعد متدرجاً ترقی مینمایند بطوریکه میتوان n را قسمی انتخاب نمود که مقدار جملهٔ مرتبهٔ n اُم از هر عدد مثبت A (آنقدر بزرگ که بخواهیم) بزرگتر گردد و بالعکس اگر قدر نسبت q کوچکتر از واحد باشد جمل متوالیهٔ تصاعد دائماً تنزل مینمایند

میتوان n را طوری انتخاب نمود که مقدار جملهٔ مرتبهٔ n اُم از هر عدد مثبت کوچک ε (آنقدر کوچک که بخواهیم) کوچکتر شود

قضایای ذیل دو مطلب فوق را بطرز بسیار واضحی مدلل میسازند

۲۰ - **قضیهٔ ۱** - **قوای متوالیهٔ هر عدد بزرگتر از واحد دائماً ترقی نموده و بزرگتر شوند از هر عدد مثبت مفروضی** (آنقدر بزرگ که بخواهیم)

برهان - فرض میکنیم که q نمایش عددی باشد بزرگتر از واحد اگر α نمایش مقدار مثبتی باشد میتوان مقدار q را چنین نمود $q = 1 + \alpha$ و اگر n نمایش عدد صحیحی باشد نامساوی ذیل همیشه محقق است

$$(1+\alpha)^n > 1 + n\alpha$$

صحت نامساوی فوق را بازاء $n = 2$ و $n = 3$ میتوان بسهولت ثابت نمود از اینقرار

$$(1+\alpha)^2 = 1 + 2\alpha + \alpha^2 \quad \text{پس} \quad (1+\alpha)^2 > 1 + 2\alpha$$

حال ثابت مینمائیم که اگر نامساوی (۱) بازاء $n = p$ محقق باشد بازاء $n = p + 1$ نیز محقق بوده بنابراین بازاء جمیع مقادیر n محقق میباشد پس فرض میکنیم که نامساوی $(1+\alpha)^p > 1 + p\alpha$ محقق است چون طرفین آنرا در مقدار مثبت $(1+\alpha)$ ضرب نمائیم حاصل میشود:

$$(1+\alpha)(1+\alpha)^p > (1+p\alpha)(1+\alpha)$$

و یا

$$(1+\alpha)^{p+1} > 1 + (p+1)\alpha + p\alpha^2$$

وحال اگر از طرف ثانی این نامساوی جمله $p\alpha^2$ را حذف نمائیم نامساوی محقق ذیل بدست میآید $(1+\alpha)^{p+1} > 1+(p+1)\alpha$

پس نامساوی (۱) بازاء جمیع مقادیر n محقق است زیرا که چون بازاء $n=3$ محقق است پس بازاء $n = p+1 = 3+1 = 4$ نیز محقق میباشد و چون بازاء $n=4$ محقق است پس بازاء $n = 4+1 = 5$ نیز محقق میباشد وهکذا

پس از این مقدمه میتوان رابطه ذیل را نوشت $q^n = (1+\alpha)^n > 1+n\alpha$

وحال اگر عدد مثبت بسیار بزرگی مانند A فرض نمائیم مقدار q^n بزرگتر از A خواهد بود هرگاه $1+n\alpha > A$ ویا $n > \frac{A-1}{\alpha}$ باشد پس اگر قدر نسبت یک تصاعد هندسی بزرگتر از واحد باشد میتوان n را طوری انتخاب نمود که مقدار جمله مرتبه n ام یعنی $a\times q^{n-1}$ از هر عدد مثبت مفروضی تجاوز نماید

۲۱- **قضیه ۲- قوای متوالیه هر عدد مثبت کوچکتر از واحد دائماً تنزل نموده و کوچکتر شوند از هر عدد مثبت مفروضی (آنقدر کوچک که بخواهیم)**

برهان - فرض میکنیم که q نمایش عدد مثبتی باشد کوچکتر از واحد اگر α نمایش

مقدار مثبتی باشد میتوان مقدار q را بصورت $q = \frac{1}{1+\alpha}$ نمود بنابراین $q^n = \frac{1}{(1+\alpha)^n}$ وحال اگر ε نمایش عدد مثبت بسیار کوچکی باشد q^n کوچکتر است از ε هرگاه $\frac{1}{(1+\alpha)^n} < \varepsilon$ ویا $(1+\alpha)^n > \frac{1}{\varepsilon}$ باشد وبجهت این عمل مطابق قضیه اول کافی است n را طوری انتخاب نمود که در نامساوی ذیل صدق کند $n > \frac{\frac{1}{\varepsilon}-1}{\alpha}$ پس اگر در تصاعد هندسی قدر نسبت q کوچکتر از واحد باشد جمل متوالیه تنزل نموده ومیتوان n را طوری انتخاب نمود که مقدار جمله مرتبه n ام یعنی aq^{n-1} از هر عدد مثبت مفروضی کوچکتر شود

۲۲- **مسئله** - درج وسائط هندسی مابین دو عدد مفروض

درج کردن $m-1$ واسطه هندسی مابین دو عدد مفروض A و B عبارت از تشکیل یک تصاعد هندسی است که دارای $(m+1)$ جمله بوده بطریقی که A و B دو جمله طرفین آن باشند

واضح است که حل این مسئله عبارتست از تعیین قدر نسبت q تصاعد مطلوب پس اگر A را جمله اول و B را جمله آخر تصاعد مطلوب اختیار نمائیم چنین خواهیم داشت $B = A\times q^m$ واز آنجا $q = \sqrt[m]{\frac{B}{A}}$ بنابراین وسایط مطلوبه چنین خواهند بود: $A\sqrt[m]{\frac{B}{A}}$ و $A\left(\sqrt[m]{\frac{B}{A}}\right)^2$

و $A\left(\sqrt[m]{\frac{B}{A}}\right)^{3}$ و .... و $A\left(\sqrt[m]{\frac{B}{A}}\right)^{m-1}$

و چون تعریف نماینده های کسری را بخاطر آوریم (نمرهٔ ۱۴ جلد دوم) میتوانیم وسائط مذکوره را بطریق ذیل بنویسیم

$$A\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{m}},\ A\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{2}{m}},\ A\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{3}{m}},\ \ldots\ldots,\ A\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{m-1}{m}}$$

مثال - مابین دو عدد ۷ و ۴۴۸ پنج واسطهٔ هندسی درج کنید قدر نسبت تصاعد مطلوب بر وفق دستور $q=\sqrt[m]{\frac{B}{A}}$ مساویست با $q=\sqrt[6]{\frac{448}{7}}$

ویا $q=\sqrt[3]{\sqrt{64}}=\sqrt[3]{8}=2$ پس وسایط مطلوبه عبارتند از :

$$7\times2,\quad 7\times2^{2},\quad 7\times2^{3},\quad 7\times2^{4},\quad 7\times2^{5}$$

ویا ۱۴ و ۲۸ و ۵۶ و ۱۱۲ و ۲۲۴

بطوریکه با دو عدد ۷ و ۴۴۸ تشکیل تصاعد هندسی ذیل را میدهند

$$\div\ 7 : 14 : 28 : 56 : 112 : 224 : 448$$

نتیجه ۱ - مابین دو عدد A و B میتوان آنقدر وسائط هندسی درج نمود که تفاضل مابین هر دو واسطهٔ متوالیه آنقدر کوچک باشد که بخواهیم

چون مابین A و B یک عدهٔ وسایطی مساوی $(m-1)$ درج کنیم مقدار

قدر نسبت چنین خواهد بود $q=\sqrt[m]{\frac{B}{A}}$ پس مقدار دو واسطهٔ متوالیه مرتبهٔ K ام و $(K+1)$ ام را میتوان چنین نوشت : $A\left(\sqrt[m]{\frac{B}{A}}\right)^{K}$ و $A\left(\sqrt[m]{\frac{B}{A}}\right)^{K+1}$

و چون تفاضل این دو واسطه را تعیین نمائیم حاصل میشود :

$$A\left(\sqrt[m]{\frac{B}{A}}\right)^{K+1}-A\left(\sqrt[m]{\frac{B}{A}}\right)^{K}=A\left(\sqrt[m]{\frac{B}{A}}\right)^{K}\left[\sqrt[m]{\frac{B}{A}}-1\right]=A\left(\sqrt[m]{\frac{B}{A}}\right)^{K}\left[\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{m}}-1\right]$$

چنانکه ملاحظه میشود وقتیکه عدهٔ وسایط بقدر کفایت زیاد باشد تفاضل مزبور از هر عدد مثبت کوچکی کوچکتر میشود زیرا که چون m الی غیر النهایه ترقی نماید $\frac{1}{m}$ میل میکند بسمت صفر و $\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{m}}$ میل میکند بسمت یک پس $\left[\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{m}}-1\right]$ میل مینماید بسمت صفر بنابراین $A\left(\sqrt[m]{\frac{B}{A}}\right)^{K}\left[\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{m}}-1\right]$ نیز بسمت صفر میل نموده پس از هر عدد مثبت کوچکی کوچکتر میشود

نتیجه - هرگاه مابین هر دو جمله متوالیه تصاعد هندسی $\div a : b : c : \ldots\ldots : f : h : k \ldots$ یک عدهٔ معین وسایط هندسی درج کنیم وسایط مندرجه با جمل تصاعد مفروض تشکیل یک تصاعد هندسی اتصالی را میدهند

زیرا اگر q قدر نسبت تصاعد مفروض باشد و بخواهیم مابین هر دو جمله متوالیه (a, b) و (b, c) و .... و (h, k) و .... وغیره $(m-1)$

واسطهٔ هندسی درج کنیم قدر نسبتهای تصاعدات جدیده چنین خواهند بود :

$$q = \sqrt[m]{\frac{b}{a}} = \sqrt[m]{q} \text{ و } q' = \sqrt[m]{\frac{c}{b}} = \sqrt[m]{q} \text{ و } \dots\dots \text{ و } q_h = \sqrt[m]{\frac{k}{h}} = \sqrt[m]{q}$$

چنانکه ملاحظه میشود قدر نسبتهای q' و q'' و ... و q_h باهم مساوی بوده و بعلاوه چون در هریک از تصاعدات جزئیه جملهٔ اول عبارت است از جملهٔ آخر تصاعد قبل و جملهٔ آخر مساوی است با جملهٔ اول تصاعد بعد پس اگر تمام تصاعدات جزئیه را متوالی یکدیگر بنویسیم تصاعد اتصالی جدیدی تشکیل میشود که قدر نسبتش همان قدر نسبت مشترک تصاعدات جزئیه یعنی $\sqrt[m]{q}$ میباشد

نتیجه ۳ - هرگاه مابین دو عدد مفروض A و B متوالیاً $(m-1)$ و $(m'-1)$ و $(m''-1)$ واسطهٔ هندسی درج کنیم جمیع وسایط مندرجهٔ مختلفه جمل یک تصاعد هندسی میباشند

زیرا فرض میکنیم که مابین A و B بترتیب $(m-1)$ و $(m'-1)$ واسطهٔ هندسی درج کرده باشیم واضحست که قدر نسبتهای وسایط مذکوره چنین خواهند بود

$$q = \sqrt[m]{\frac{B}{A}} \text{ و } q' = \sqrt[m']{\frac{B}{A}} \text{ ویا } q = \sqrt[mm']{\left(\frac{B}{A}\right)^{m'}} \text{ و } q' = \sqrt[mm']{\left(\frac{B}{A}\right)^{m}}$$

حال واسطهٔ مرتبه K ام وسایط اولی و واسطهٔ مرتبهٔ K' ام وسایط دومی را میتوان چنین نوشت $A\left[\sqrt[mm']{\left(\frac{B}{A}\right)^{m'}}\right]^{K}$ و $A\left[\sqrt[mm']{\left(\frac{B}{A}\right)^{m}}\right]^{K'}$ ویا بصورت

$A\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{Km'}{mm'}}$ و $A\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{K'm}{mm'}}$ وبسهولت میتوان دید که اگر مابین A و B یک عده وسایطی مساوی $(mm'-1)$ درج کنیم دو واسطهٔ مذکوره واسطهٔ مرتبهٔ Km' ام و $K'm$ ام وسایط جدیده بوده و بنابراین دو جملهٔ یک تصاعد میباشند

۲۳ - **قضیهٔ ۲** - در هر تصاعد هندسی محدود حاصل ضرب هر دو جملهٔ متساوی البعد از طرفین مقداریست ثابت و مساویست با حاصل ضرب دو جملهٔ طرفین

برهان - تصاعد هندسی ذیل را که قدر نسبتش q و عدهٔ جمل آن m است فرض مینمائیم

$$\div\div a : b : c : \dots\dots : x : \dots y : \dots h : k : l$$

اگر x و y نمایش دو جمله باشند که n جمله قبل از x و n جمله بعد از y واقع باشد باید ثابت کنیم که

$$x \times y = a \times l$$

مقدار x را که جملهٔ $(n+1)$ ام است میتوان چنین نوشت $x = aq^{n}$ (۱)

بجهت تعیین مقدار y فرض میکنیم که تصاعد مفروض از y شروع شده و به l ختم شود جملهٔ l که در تصاعد جدید در مرتبهٔ $(n+1)$ ام واقعست مقدارش را میتوان چنین نوشت $l = yq^{n}$ پس $y = \frac{l}{q^{n}}$ (۲) حال اگر دو تساوی (۱) و (۲) را عضو

بعضو در یکدیگر ضرب نمائیم حاصل میشود $xy = al$

تبصره - هرگاه عدهٔ جمل تصاعد هندسی فرد باشد جمله وسط مساوی است بجذر حاصل ضرب دو جملهٔ طرفین

فرض مینمائیم که در تصاعد $\div\, a : b : c : \ldots x : \ldots h : k : l$ جمله x باشد که n جمله قبل از آن و n جمله دیگر بعد از آن واقع باشند و اگر q قدر نسبت تصاعد باشد مقدار x را میتوان چنین نوشت

$$x = a q^{n} \quad (1)$$

و همچنین اگر فرض نمائیم که تصاعد مفروض فوق از x شروع شده و به l ختم شود میتوان مقدار l را که در تصاعد جدید در مرتبه $(n+1)$ ام واقعست چنین نوشت $x q^{n} = l$ پس $x = \frac{l}{q^{n}}$ (۲) حال اگر تساویهای (۱) و (۲) را عضو بعضو در یکدیگر ضرب نمائیم حاصل میشود $x^2 = al$ و یا $x = \sqrt{al}$

۲۴ - **مسئله** - مطلوب است تعیین حاصل ضرب جمل یک تصاعد هندسی محدود

تصاعد هندسی محدود ذیل را که دارای n جمله است فرض مینمائیم $\div\, a : b : c \ldots\ldots h : k : l$ حال اگر حاصل ضرب مطلوب را به P بنمائیم چنین خواهیم داشت :

$$(1) \quad P = a \times b \times c \times \ldots\ldots\ldots\ldots \times h \times k \times l$$

و یا

$$(2) \quad P = l \times k \times h \times \ldots\ldots\ldots\ldots \times c \times b \times a$$

چون تساویهای (۱) و (۲) را عضو بعضو در یکدیگر ضرب نمائیم حاصل میشود :

$$(3) \quad P^2 = (al) \times (bk) \times (ch) \times \ldots (hc) \times (kb) \times (la)$$

و چون بر وفق قضیهٔ ۲ (نمرهٔ ۲۳) مقدار هر یک از پرانتزهای رابطهٔ فوق مساویست با (al) و بعلاوه چون عدهٔ پرانتزها برابر است با n عدهٔ جمل تصاعد مفروض پس تساوی (۳) را میتوان چنین نوشت $P^2 = (al)^n$ و بنابراین $P = \sqrt{(al)^n}$ و یا $P = (al)^{\frac{n}{2}}$ حال اگر قدر نسبت تصاعد مفروض را q فرض کنیم مقدار l را میتوان چنین نوشت $l = aq^{n-1}$ و بنابراین مقدار P را هم میتوان بصورت ذیل نوشت $P = [a \times aq^{n-1}]^{\frac{n}{2}}$ و یا $P = a^{n} \times q^{\frac{n(n-1)}{2}}$ از روی این دستور میتوان مقدار P را بدون استخراج جذر حساب نمود زیرا که هرچه باشد مقدار n همیشه حاصل ضرب $n(n-1)$ قابل قسمت است بر ۲

۲۵ - **قضیهٔ ۳** - مجموع جمل هر تصاعد هندسی محدود مساویست با $S = a \times \frac{q^{n}-1}{q-1}$ و یا $S = \frac{lq-a}{q-1}$

تصاعد هندسی محدود ذیل را که عده جملش n و قدر نسبتش $q \neq 1$ فرض مینمائیم

$$\div\div\ a : b : c : \ldots\ldots : h : k : l$$

حال اگر مجموع جمل تصاعد مفروض را به S بنمائیم چنین خواهیم داشت :

$S = a + b + c + \cdots + h + k + l$ (۱) و چون طرفین این تساوی را در قدر نسبت q ضرب نمائیم حاصل میشود $Sq = aq + bq + cq + \cdots + hq + kq + lq$ (۲)

و حال اگر تساوی (۱) را از تساوی (۲) عضو بعضو نقصان کنیم حاصل میشود $S(q-1) = lq - a$ و یا $S = \frac{lq-a}{q-1}$ و چون در این دستور بجای l مقدارش aq^{n-1} را قرار دهیم حاصل میشود $S = a\frac{q^n-1}{q-1}$

۲۶- **قضیهٔ ۴** - حد حاصل جمع جمل هر تصاعد هندسی نزولی غیر محدود مساویست با خارج قسمت جملهٔ اول بر فضل واحد بر قدر نسبت یعنی با $S = \frac{a}{1-q}$

سابقاً دیده ایم که تصاعد هندسی را نزولی گویند وقتیکه قدر نسبتش q کوچکتر از واحد باشد حال تصاعد هندسی نزولی غیر محدودی که جملهٔ اولش a و قدر نسبتش q باشد فرض میکنیم واضحست که هر قدر عده جمل تصاعد مفروض را زیادتر اختیار نمائیم مجموع جملش دائماً ترقی مینماید اما سرعت ترقی مجموع جمل بعلت آنکه

مقدار جمل متوالیه تصاعد دائماً در تنزل است بیش از پیش کمتر میشود و ما میخواهیم ثابت نمائیم که اگر n عدهٔ جمل تصاعد هندسی نزولی مفروض الی غیر النهایه زیاد شود مجموع جمل بی اندازه نزدیک به $\frac{a}{1-q}$ میشود ولی هیچوقت بمقدار $\frac{a}{1-q}$ نمیرسد بطریقی که $\frac{a}{1-q}$ حد مجموع جمل تصاعد هندسی نزولی غیر محدود میباشد وقتیکه عده جمل بینهایت زیاد شود

زیرا که دستور $S = a \times \frac{q^n-1}{q-1}$ را میتوان چنین نوشت $S = a \times \frac{1-q^n}{1-q}$ و یا $S = \frac{a}{1-q}(1-q^n)$ چنانکه می بینیم مجموع S عبارت است از حاصل ضرب دو عامل $\frac{a}{1-q}$ که مقداریست ثابت و $(1-q^n)$ که چون n تغییر و ترقی نماید مقدارش دائماً تغییر و ترقی نموده میل میکند بسمت یک زیرا که چون برحسب فرض q مقدار مثبتی است کوچکتر از واحد پس بر وفق قضیهٔ دوم (نمرهٔ ۲۱) هر قدر که مقدار n ترقی کند مقدار q^n تنزل مینماید بطریقی که میتوان n را طوری انتخاب نمود که مقدار q^n از هر عدد مثبت بسیار کوچکی کوچکتر شود در این صورت تفاضل $(1-q^n)$ را میتوان بدون خطای محسوسی مساوی واحد اختیار نمود و بنابراین مقدار $S = \frac{a}{1-q}(1-q^n)$ را هم بازاء $n = \infty$ میتوان بدون خطای محسوس پس مساوی $S = \frac{a}{1-q}$ دانست

مثال ۱ - مطلوبست حد کسر متناوب بسیط ۰/۱۷ ۱۷ ۱۷ ۱۷

ابتدا کسر مفروض را بصورت ذیل مینویسیم $0/17171717\ldots = \frac{17}{100} + \frac{17}{10000} + \frac{17}{1000000}$

و حال چنانکه می بینیم مقدار کسر مفروض معادل است با مجموع جمل یک تصاعد هندسی نزولی که جملهٔ اولش $\frac{17}{100}$ و قدر نسبتش $\frac{1}{100}$ و عدهٔ جملش بینهایه میباشد پس حدش بر وفق دستور $\frac{a}{1-q}$ چنین خواهد بود

$$S = \frac{\frac{17}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{\frac{17}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{17}{99}$$

مثال ۲ - مطلوبست تعیین حد کسر متناوب مرکب ۰/۷۱۴۵۴۵۴۵۴۵

چون مقدار کسر مفروض را به S نموده و آن را صد برابر کنیم حاصل میشود

$$100\,S = 71 + 0/45454545\ldots$$

و یا $100\,S = 71 + \frac{45}{100} + \frac{45}{10000} + \frac{45}{1000000} + \cdots$

حد مجموع جملی که در تساوی فوق بعد از عدد ۷۱ واقع میباشند بر وفق مثال ۱ مساوی است با $\frac{45}{99}$ پس $100\,S = 71 + \frac{45}{99}$

و یا $100\,S = \frac{71(100-1)+45}{99}$

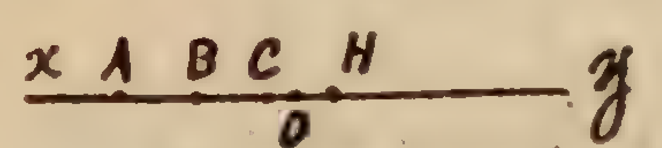
و از آنجا $S = \frac{7145-71}{9900}$

مثال ۳ - حد حاصل جمع ذیل را تعیین کنید $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$

جمل حاصل جمع مفروض عبارتند از جمل متوالیه یک تصاعد هندسی نزولی که جملهٔ اولش یک و قدر نسبتش $\frac{1}{2}$ میباشد پس حد جملش چنین خواهد بود $S = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

مثال فوق را میتوان بطور هندسی بطریق ذیل تعبیر نمود

هرگاه متحرکی مانند (مورچه) بر روی خط xy ابتدا از نقطهٔ A شروع بحرکت کرده و فاصلهٔ AB را مثلاً در یک ثانیه طی نموده و بعد در ثانیهٔ دوم فاصلهٔ : $BC = \frac{AB}{2}$ را طی نماید و بطور کلی در هر ثانیه نصف



آنچه را که در ثانیه قبل نموده بپیماید هیچوقت بنقطهٔ H بطریقی که $AH = 2AB$ باشد نخواهد رسید اما پس از مدت زیادی میتوان بنقطهٔ H آنقدر نزدیک شود که بخواهیم

تبصرهٔ ۱ - چون در دستور $S = a \times \frac{q^n-1}{q-1}$ قدر نسبت q را مساوی واحد فرض کنیم مقدار حاصل جمع جمل تصاعد بصورت مبهم $S = \frac{0}{0}$ درمیآید ولکن میتوان این ابهام را بسهولت رفع نمود بدینطریق که دو جملهٔ کسر $\frac{q^n-1}{q-1}$ را بر عامل مشترک $(q-1)$ که باعث ابهام است قسمت نموده تا حاصل شود

$$S = a\,(q^{n-1} + q^{n-2} + q^{n-3} + \cdots\cdots + q^2 + q + 1)$$

و یا $S = a\,(1+1+1+1+\cdots\cdots+1+1+1+1) = na$

بدیهی است که اگر در تصاعد هندسی قدر نسبت مساوی واحد باشد جمیع جمل با هم متساوی میباشند و مجموع n جمله مساوی با a مساوی است با $S = na$

تبصره ۲ - از مقایسه دستورهای متناظرهٔ تصاعدات حسابی و هندسی میتوان بسهولت استنباط نمود که چون در هر دستوری از تصاعد حسابی علامات + و - و × و : را بترتیب مبدل به × و : و قوه و √ بنمائیم دستور نظیر تصاعد هندسی بدست میآید و بالعکس

مثلاً قدر نسبت r در موقع درج $(m-1)$ واسطهٔ عددی مابین دو عدد A و B مساویست با $\frac{B-A}{m} = r$ و در موقع درج $(m-1)$ واسطهٔ هندسی مابین دو عدد A و B قدر نسبت عبارت است از $q = \sqrt[m]{\frac{B}{A}}$

امثله

۶۱ - سه عدد تعیین کنید که جمل متوالیهٔ یک تصاعد هندسی باشند بطریقی که مجموعشان ۲۶ و فضل جملهٔ آخر بر مجموع دو جملهٔ اول مساوی ده باشد

۶۲ - مبلغ ۲۲۱ تومان را مابین سه نفر چنان قسمت کنید که سهام مطلوبه جمل متوالیه یک تصاعد هندسی بوده و بعلاوه سهم سومی باندازهٔ ۱۳۶ تومان از سهم اولی زیادتر باشد

۶۳ - سه عدد تعیین کنید که جمل متوالیه یک تصاعد هندسی باشند بطریقیکه حاصل جمعشان ۱۹ و حاصل جمع مربعاتشان ۱۳۳ باشد

۶۴ - در دایره مفروضه بشعاع r مربعی محاط کرده و بعد در این مربع دایره محاط نموده و در این دایره مربعی محاط کرده و هکذا عمل را مداومت میدهند مطلوب است اولاً - تعیین حد حاصل جمع ساحتهای مربعات محاطیه

ثانیاً - حد حاصل جمع ساحتهای دوایر متوالیه

۶۵ - چهار عدد تعیین کنید که جمل متوالیه یک تصاعد هندسی باشند بطریقی که مجموع دو عدد اول مساوی ۲۸ و مجموع دو عدد آخر مساوی ۱۷۵ باشد.

۶۶ - مجموع جمل تصاعد هندسی که عدهٔ جملش پنج است مساویست با ۴۸۴ مطلوب است تعیین این جمل در صورتیکه بدانیم مجموع جمل مراتب زوج مساوی است با ۱۲۰

مقالهٔ دوم

لگاریتمها و معادلات مجهول القوی

(فصل اول)

لگاریتمها

۲۷ - **تعریف** - هرگاه دو تصاعد مفروض باشند یکی تصاعد هندسی صعودی که شروع شده باشد از واحد و دیگری تصاعد حسابی صعودی که شروع شده باشد از صفر و چون آنهارا جمله بجمله ابتدا از جملهٔ اول بطریق ذیل زیر یکدیگر بنویسیم در اینصورت ... هر جمله از تصاعد دیرا ...

$$\begin{cases} \div\div\ 1 : q : q^2 : q^3 : \dots\dots : q^n \dots\dots \\ \div\ 0 . r . 2r . 3r \dots\dots nr \end{cases} \quad (1)$$

لگاریتم جملهٔ نظیرش از تصاعد هندسی گویند پس بر وفق این تعریف r $2r$ لگاریتم q^2 و $3r$ لگاریتم q^3 و بطور کلی nr لگاریتم q^n میباشد و آنهارا چنین مینمایند $\log q^2 = 2r$ و $\log q^3 = 3r$ و $\log q^n = nr$

$\log$ را تلفظ کنند لگاریتم

و بالعکس هر جمله از تصاعد هندسی را عدد یا بازاء لگاریتم جملهٔ نظیرش از تصاعد حسابی نامند و میگویند که تصاعدات دستگاه (۱) تشکیل یک دستگاه لگاریتم میدهند و باید دانست که عدد دستگاه های لگاریتم غیر معدود میباشد مثلا در دستگاه ذیل

$$\begin{cases} \div\div\ 1 : 2 : 2^2 : 2^3 : \dots\dots : 2^n \\ \div\ 0 . 1 . 2 . 3 \dots\dots n \dots\dots \end{cases}$$

لگاریتم 2^3 و یا ۸ مساویست با ۳ ... $\div\div\ 1 : 2 : 2^2 : 2^3 : \dots\dots 2^n$

و در دستگاه ...... $\div\ 0 . 3 : 6 . 9 \dots\dots n+3 \dots\dots$

لگاریتم 2^3 و یا ۸ عدد ۹ میباشد

ما بین جمیع دستگاههای لگاریتم آنکه از همه معروفتر و مهمتر است دستگاه ذیل میباشد

$$\begin{cases} \div\div\ 1 : 10 : 10^2 : 10^3 : 10^4 : \dots\dots 10^n : \dots\dots \\ \div\ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . \dots\dots n \dots\dots \end{cases} \quad (2)$$

که در آن قدر نسبت تصاعد هندسی ده و قدر نسبت تصاعد حسابی یک میباشد و آن را لگاریتم اعشاری و یا لگاریتم عمومی گویند و بریگ Briggs معاصر ژان نپر Jean Neper اول کسی است که در سنهٔ ۱۶۲۴ مسیحی جداول لگاریتم اعشاری را منتشر نمود

ولی مخترع لگاریتم در اروپا همانا نپر است که آنرا در اوایل قرن هفدهم کشف نموده و منتشر ساخت «میگویند که از مابین ایرانیها مرحوم ملاعلیمحمد اصفهانی والد مرحوم حاج میرزا عبدالغفار نجم الدوله نیز اصول و مبانی لگاریتم را کشف نموده بود ولی مقارن همان اوقات روابط اروپائیها با ایرانیها زیاد شده و بواسطه ورود کشفیات اروپائیها در ایران زحمات مرحوم ملاعلی محمد الطوری که بایستی مورد دقت اهل فن گردد نگشت معذلک مرحوم ملاعلی محمد یکی از اجله علمای ریاضی ایران بشمار میرود و تحقیقات آن مرحوم در علوم ریاضی قابل توجه و برای انتقال بعضی نکات مفید و با اثر میباشد».

در هر دستگاه لگاریتم عدد یرا که لگاریتمش واحد است مبنای آن دستگاه میگویند مثلاً در لگاریتمهای اعشاری مبنا عدد ده میباشد و مبنای دستگاهی را که نپر اختیار کرده است عدد اصمی است معروف به e که در ریاضیات عالیه اهمیت عمده دارد و مقدار آن تا چند رقم اعشار چنین میباشد $e = ۲٫۷۱۸\ldots$

لگاریتمهائیکه مبنایشان e میباشد موسومند به لگاریتمهای طبیعی و یا هذلولی و یا نپری

باید دانست که جمیع اعداد مثبته دارای لگاریتم میباشند زیرا اگر N نمایش عدد

مثبت مفروضی باشد که مابین جمل تصاعد هندسی دستگاه (۲) موجود نباشد میتوان بواسطه درج وسایط هندسی عددی تعیین نمود که یا بکلی مساوی N و یا آنقدر نزدیک به N باشد که بخواهیم در این صورت چون مابین جمل متوالیه تصاعد حسابی دستگاه (۲) نیز همان عده وسایط درج نمائیم جمله که نظیر N یا نظیر مقدار تقریبی N است لگاریتم آن میباشد

چون تصاعدات دستگاه (۱) از طرف چپ بسط دهیم چنین خواهیم داشت

$$\ldots : \frac{1}{q^n} : \ldots\ldots : \frac{1}{q^2} : \frac{1}{q} : 1 : q : q^2 \ldots : q^n : \ldots$$

$$\ldots nh \ldots -2h \ldots -h \quad 0 \quad h \quad 2h \ldots nh \ldots$$

جمل $\frac{1}{q}$ و $\frac{1}{q^2}$ و . . . . و $\frac{1}{q^n}$ که مقادیرشان کوچکتر از واحد است دارای لگاریتم $(-h)$ و $(-2h)$ و . . . و $(-nh)$ میباشند پس از آنچه ذکر شد میگوئیم که جمیع اعداد مثبته در دستگاههای مختلفه دارای لگاریتم میباشند و این لگاریتمها مثبت اند اگر اعداد مفروضه بزرگتر از واحد باشند و منفی اند هرگاه اعداد مفروضه کوچکتر از واحد باشند ولی اعداد منفیه ابداً دارای لگاریتم نیستند

خواص لگاریتمها

۲۸ - **قضیهٔ ۱** - لگاریتم حاصلضرب چندین عامل مساویست با مجموع لگاریتمهای آن عوامل

برهان - ابتدا فرض میکنیم که دو عامل مثبت N و N' بعد از درج یک عده وسایط در تصاعد هندسی دستگاه (۱) بنفسه پیدا شوند در اینصورت N و N' را میتوان بصورت ذیل نمود $N=(\sqrt[n]{q})^{K}$ و $N'=(\sqrt[n]{q})^{K'}$

پس $N\times N'=(\sqrt[n]{q})^{K+K'}$ بنابراین لگاریتمهای N و N' و $N\times N'$ چنین خواهند بود $\log N=\frac{K\cdot l}{n}$ ، $\log N'=\frac{K'\cdot l}{n}$ و $\log(N\times N')=\frac{(K+K')l}{n}$

و چون $\frac{K\cdot l}{n}+\frac{K'\cdot l}{n}=\frac{(K+K')l}{n}$ پس $\log(N\times N')=\log N+\log N'$

ثانیاً - فرض مینمائیم که دو عامل مثبت N و N' هیچ جزء تصاعد هندسی دستگاه (۱) نباشد (اعم از آنکه در این تصاعد وسایطی درج بنمائیم یا ننمائیم) اما اگر ما بین جمل متوالیهٔ تصاعد هندسی دستگاه (۱) مثلاً $(n-1)$ واسطهٔ هندسی درج نمائیم میتوان چنین داشت

$(\sqrt[n]{q})^{K}<N<(\sqrt[n]{q})^{K+1}$ و $(\sqrt[n]{q})^{K'}<N'<(\sqrt[n]{q})^{K'+1}$

پس $(\sqrt[n]{q})^{K+K'}<N\times N'<(\sqrt[n]{q})^{K+K'+2}$ و چون لگاریتم مقدار مثبتی ترقی یا تنزل مینماید برحسب آنکه خود آن مقدار ترقی یا تنزل نماید پس

(۳) $\frac{K\cdot l}{n}<\log N<\frac{(K+1)l}{n}$ و (۴) $\frac{K'\cdot l}{n}<\log N'<\frac{(K'+1)l}{n}$

و (۵) $\frac{(K+K')l}{n}<\log(N\times N')<\frac{(K+K'+2)l}{n}$ چون نامساویهای

(۳) و (۴) را عضو بعضو با یکدیگر جمع کنیم حاصل میشود

(۶) $\frac{(K+K')l}{n}<\log N+\log N'<\frac{(K+K'+2)l}{n}$

حال چون نامساویهای (۵) و (۶) را با یکدیگر مقایسه کنیم می بینیم که لگاریتم حاصل ضرب دو عامل و حاصل جمع لگاریتمهای همان دو عامل هر دو محصورند ما بین دو مقدار متغیر $\frac{(K+K')l}{n}$ و $\frac{(K+K'+2)l}{n}$ و چون تفاضل $\frac{2l}{n}$ این دو مقدار متغیر میل میکند بسمت صفر وقتیکه n الی غیر النهایه زیاد شود پس مقادیر $\log(N\times N')$ و $(\log N+\log N')$ را میتوان در این حالت ثانی نیز کاملاً مساوی یکدیگر دانست یعنی $\log(N\times N')=\log N+\log N'$

ثالثاً - فرض میکنیم که عوض دو عامل چندین عامل موجود باشد در اینصورت میتوان بر وفق حالت اول تساویهای ذیل را نوشت

$$\log(N\times N'\times N''\times N''')=\log(N\times N'\times N'')+\log N'''$$

و $$\log(N\times N'\times N'')=\log(N\times N')+\log N''$$

و $$\log(N+N')=\log N+\log N'$$

حال چون تساویهای فوق را عضو بعضو با یکدیگر جمع نمائیم حاصل میشود

$$\log(N+N'+N''+N''')=\log N+\log N'+\log N''+\log N'''$$

نتیجه ۱- لگاریتم قوهٔ هر عدد مساوی است با حاصلضرب لگاریتم آن عدد در نمایندهٔ قوه

زیرا که قوهٔ n ام هر عدد را میتوان چنین نوشت $P^n = \overbrace{P\times P\times P\times\cdots P}^{n \text{ مرتبه}}$ و بموجب

قضیهٔ ۱ $\log(P\times P\times P\cdots\cdots P)=\log P+\log P+\log P+\cdots\log P$

ویا $\log(P\times P\times P\times P\cdots\times P) = n\log P$

پس $\log P^n = n\log P$ (n نمایش عدد جبری است غیر مشخص)

نتیجه ۲- لگاریتم ریشهٔ هر عدد مساویست با خارج قسمت لگاریتم آنعدد بر نماینده ریشه

ریشهٔ n ام هر مقدار P را میتوان چنین نوشت $\sqrt[n]{P} = P^{\frac{1}{n}}$ و بر وفق (۱)

$\log P^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\log P = \frac{\log P}{n}$ پس $\log\sqrt[n]{P} = \frac{\log P}{n}$

نتیجه ۳- لگاریتم خارج قسمت دو مقدار مساویست با لگاریتم مقسوم منهای لگاریتم مقسومٌ علیه

فرض میکنیم که خارج قسمت A بر B مساوی R باشد $\frac{A}{B} = R$ ویا

$A = B\times R$ وحال بموجب قضیه $\log A = \log B + \log R$ ویا

$\log A - \log B = \log R$ وبنابراین $\log\frac{A}{B} = \log A - \log B$

واگر $A=1$ باشد حاصل میشود $\log\frac{1}{B} = \log 1 - \log B = -\log B$

(زیرا که $\log 1 = 0$ میباشد)

از رابطهٔ فوق بسهولت میتوان استنباط نمود که لگاریتم عکس هر عدد مساویست با لگاریتم آن عدد با علامت مخالف

تبصره - شرط صحت قضیه و نتایج فوق این است که لگاریتم واحد مساوی صفر باشد

برای اثبات این مطلب دستگاه ذیل را که در آن تصاعد هندسی شروع شده است از واحد و تصاعد حسابی

$$\div\div\ 1 : q : q^2 : q^3 : \cdots : q^n : \cdots q^{n'} : \cdots$$

$$\div\ a \,.\, a+r \,.\, a+2r \,.\, a+3r \ldots a+nr \ldots a+n'r \ldots$$

شروع شده است از یک عدد غیر مشخص a فرض مینمائیم حال اگر دو جملهٔ q^n و $q^{n'}$ را در تصاعد هندسی اختیار نمائیم حاصل ضربشان چنین خواهد بود $q^n\times q^{n'} = q^{n+n'}$ وچون لگاریتم $q^{n+n'}$ مساویست با لگاریتم q^n بعلاوه لگاریتم $q^{n'}$ پس

$a + (n+n')r = (a+nr) + (a+n'r)$ ویا $a = 0$

چون در دستگاه ذیل ملاحظه کنیم می‌بینیم که فقط قوای متوالیه ۱۰ دارای لگاریتم صحیح میباشند چنانکه

$$10^n \ldots : 10^2 : 10 : 1 : \frac{1}{10} : \frac{1}{10^2} \ldots : \frac{1}{10^n} \ldots$$

$$n \ldots 2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot -1 \cdot -2 \ldots -n \ldots$$

لگاریتم ده مساویست با یک و لگاریتم 10^2 مساویست با ۲ و لگاریتم $\frac{1}{10^2}$ و 10^{-2} مساویست با ۲- و بطور کلی لگاریتم 10^n مساویست با n اما لگاریتم عددی که واقع باشد مثلاً مابین 10^n و 10^{n+1} واقع است مابین n و n+1 و بنابراین مرکب است از دو جزء یک جزء صحیح n موسوم به مفسر و یک جزء اعشاری که آنرا بفرانسه مانتیس (mantisse) گویند

۲۹ - **قضیهٔ ۲** - مفسر لگاریتم هر عدد بزرگتر از واحد مساویست با عده ارقام صحیح آنعدد منهای یک

فرض میکنیم که مثلاً مقصود تعیین مفسر لگاریتم عدد ۳۲۵٫۷۵ باشد چنانکه می‌بینیم عدد مفروض واقع است مابین ۱۰۰ و ۱۰۰۰ یعنی $10^3 > 325.75 > 10^2$ پس لگاریتمش واقعست مابین ۲ و ۳ بنابراین جزو صحیح لگاریتمش عدد ۲ است و واضح است که عدد ۲ مساویست با عده ارقام صحیح عدد مفروض یعنی ۳ منهای یک و همچنین مفسر لگاریتم ۵٫۶۷۵ مساوی است با صفر و مفسر

لگاریتم ۰٫۹۴۵ مساوی است با ۱- و هکذا

۳۰ - **قضیهٔ ۳** - مفسر لگاریتم هر عدد کوچکتر از واحد شامل آنقدر آحاد منفی است که آنعدد در سمت چپ اولین رقم با معنایش دارای صفر میباشد

فرض میکنیم که مثلاً مقصود تعیین مفسر منفی عدد کوچکتر از واحد ۰٫۰۰۴۵ باشد واضحست که این عدد واقعست مابین ۰٫۰۱ و ۰٫۰۰۱ یعنی

پس $-2 > \log 0.0045 > -3$ بنابراین لگاریتم عدد ۰٫۰۰۴۵ مرکبست از یک جزء منفی ۳- موسوم به مفسر بعلاوه یک مقدار مثبت کوچکتر از واحدی موسوم به مانتیس و چنانکه می‌بینیم مفسر منفی مساویست بعده اصفاری که در سمت چپ اولین رقم با معنای ۴ عدد ۰٫۰۰۴۵ واقعند و همچنین مفسر ۰٫۰۱۲۷ مساوی است با ۲- و قس علیهذا و در محاسبات معمول است که علامت مفسر منفی اعداد کوچکتر از واحد را در فوق آنها قرار داده و چنین مینویسند $\bar{3}$ و $\bar{2}$ که نمایش ۳- و ۲- وغیره میباشد

و عموماً هر وقت لگاریتم منفی در دست باشد میتوان آنرا تبدیل نمود بیک جزء صحیح منفی و بیک جزء کسری مثبت مثلاً لگاریتم منفی ۳٫۷۲۵۶۷- را

میتوان مرتباً چنین نوشت

$$-۳٫۷۴۵۶۷ = -۳ - ۰٫۷۴۵۶۷ = -۳ - ۱ + ۱ - ۰٫۷۴۵۶۷$$

$$-۴ + ۰٫۲۵۴۳۳ = \bar{۴}٫۲۵۴۳۳$$

پس بجهة بدست آوردن جزء اعشاری کافیست که جمیع ارقام اعشاری لگاریتم منفی مفروض را از نه نقصان نموده باستثنای اوّلین رقم با معنای سمت راست را که میبایستی از ده کم نمود

۳۱ - **قضیهٔ ۴** - هرگاه عددی را در یکی از قوای ده ضرب یا بر یکی از قوای ۱۰ تقسیم کنیم در مانتیس لگاریتمش ابداً تغییری حاصل نمیشود امّا مفسر لگاریتمش تغییر مینماید و یک عده آحادی مساوی با نمایندهٔ قوهٔ مفروضه ده در حالت اوّل بر آن اضافه و در حالت ثانی از آن کسر میگردد

برهان - فرض میکنیم که لگاریتم عدد مفروض N مساوی ۳٫۵۷۲۶۴ باشد چون N را در یکی از قوای ده مثلاً در $۱۰^۲$ ضرب کنیم حاصل میشود $N \times ۱۰^۲$ و

$$\log(۱۰^۲ \times N) = \log ۱۰^۲ + \log N = ۲ + ۳٫۵۷۲۶۴ = ۵٫۵۷۲۶۴$$

و بهمین طریق

$$\log \frac{N}{۱۰^۲} = \log N - \log ۱۰^۲ = ۳٫۵۷۲۶۴ - ۲ = ۱٫۵۷۲۶۴$$

از قضیهٔ فوق چنین نتیجه میشود که هرگاه در عددی مکان ممیز را تغییر دهیم ابداً تغییری در مانتیس لگاریتم آنعدد حاصل نمیشود امّا مفسر لگاریتم آنعدد تغییر مینماید و باندازهٔ هر چند رقمی که ممیز بسمت راست یا بسمت چپ برده شود همان عدهٔ واحد بر مفسر اضافه یا از آن نقصان میشود

تبصره - از روی قضایای (نمرهٔ ۲۹ و ۳۰) میتوان بسهولت مفسر لگاریتم هر عدد مثبت غیر مشخصی را معیّن نمود امّا برای تعیین مانتیس لگاریتم اعداد مثبته جداول مخصوصه موسوم به جداول لگاریتم ترتیب داده اند که در آنها مانتیس لگاریتم اعداد مثبت شده است این جداول بعضی چهار رقمی و برخی پنج رقمی و عدهٔ نیز هفت رقمی میباشند و در هر یک از آنها دو مسئله ذیل که در محاسبات لگاریتمی طرف احتیاج میباشد حل شده است و باید آقایان معلّمین از روی جدولیکه متعلّمین برای خود تهیه مینمایند راه حل این دو مسئله را استخراج کرده برای متعلّمین شرح دهند

مسئلهٔ اوّل - عددی در دست است مطلوبست تعیین لگاریتم آنعدد

مسئلهٔ دوّم - مطلوبست عددی که لگاریتم آن در دست باشد

حل این دو مسئله در هریک از جداول لگاریتم شامل جزئیاتی است که در این دورهٔ مقدماتی جبر و مقابله گنجانیدن شرح آنها بیفایده است و این جزئیات را باید آقایان معلمین در ضمن حل مسائل بمتعلمین بفهمانند

۳۲ - متمم لگاریتم یا کلگاریتم - لگاریتم عکس هر عدد را کلگاریتم آنعدد گویند مثلاً کلگاریتم N مساویست بالگاریتم $\frac{1}{N}$ و آنرا چنین مینمایند

$\operatorname{colog} N = \log \frac{1}{N}$ و چون $\log \frac{1}{N} = -\log N$ پس

$\operatorname{colog} N = -\log N$ یعنی کلگاریتم هر عددی مساویست بالگاریتم آن عدد با علامت مخالف حال اگر لگاریتم N را مساوی $(c + m)$ فرض کنیم نمایش مفسر ممکن است مثبت یا منفی باشد. متمم لگاریتم آنرا میتوان چنین نوشت $\operatorname{colog} N = -c + 1 - 1 - m = -(1+c) + (1-m)$

جمله $(c + 1)$ - مقداریست صحیح مثبت یا منفی ولی $(1 - m)$ همیشه مقداریست مثبت و کوچکتر از واحد و بنابراین $(c + 1)$ - عبارتست از مفسر کلگاریتم N و $(1 - m)$ مانتیس آن میباشد

پس بجهة بدست آوردن کلگاریتم هر عدد کافیست که بر مفسر لگاریتم آنعدد یک واحد افزوده و علامت حاصل را تغییر

داد تا آنکه مفسر کلگاریتم عدد مفروض حاصل شود و بعد برای پیدا کردن مانتیس کلگاریتم میبایستی که جمیع ارقام مانتیس لگاریتم عدد مفروض را از ۹ کم نمود باستثنای اولین رقم با معنای سمت راست که باید از ده کم شود

مثال - مطلوب است کلگاریتم عددی که لگاریتمش ۲٫۷۱۴۲۶ است چون بر وفق قاعدهٔ فوق عمل کنیم حاصل میشود $\bar{3}$٫۲۸۵۷۴ و اگر لگاریتم عددی ۲٫۶۱۳۴۲ $\bar{}$ باشد کلگاریتم آن ۱٫۳۸۶۵۸ است

بواسطهٔ استعمال کلگاریتم ممکن است عمل تفریق را مبدل بعمل جمع نمود مثلاً اگر بخواهیم عبارت : $x = \frac{a^{3}\sqrt[4]{b^5}}{c\sqrt[5]{d^2}}$ را بواسطهٔ لگاریتم حساب کنیم حاصل میشود

$$\log x = \log a + \frac{5}{4} \log b - \log c - \frac{2}{5} \log d$$

و یا

$$\log x = 3 \log a + \frac{5}{4} \log b + \operatorname{colog} c + \frac{2}{5} \operatorname{colog} d$$

اجرای اعمال ثلاثه

جمع و ضرب و تقسیم

در لگاریتمها

۳۳- اولاً جمع - بجهة جمع چندین لگاریتم ابتدا آنها را زیر یکدیگر بطریقی مینویسیم که ممیزها بمحاذات یکدیگر واقع شوند و آنوقت مانتیس ها را مانند اعداد صحاح با یکدیگر جمع نموده و در مفسرها عمل جمع جبری را بجا میآوریم

مثال -

$$
\begin{array}{r}
3,71425 \\
\bar{2},31624 \\
\bar{1},63415 \\
\hline
1,66464
\end{array}
$$

ثانیاً ضرب - بجهة ضرب عدد صحیح در لگاریتم عدد بزرگتر از واحد کافی است که عمل را مانند ضرب عدد صحیح در عدد اعشاری بجای آورد

مثلاً $4 \times 2,84152 = 11,36608$

واگر بخواهیم عدد صحیحی را در لگاریتم عدد کوچکتر از واحد ضرب نمائیم مانند فوق عمل نموده و در خیال عمل اختصار را هم بجا میآوریم

مثلاً $\bar{2},84152 \times 3 = \bar{4},52456$ (زیرا که در واقع عمل ضرب فوق عبارت است از ضرب عدد ۳ در دو جملهٔ $(-2 + 0,84152)$ و ما میدانیم که:

$$3(-2 + 0,84152) = -6 + 2,52456$$

ثالثاً تقسیم - اولاً تقسیم لگاریتم بر عدد صحیح —— دو حالت ممکن است اتفاق افتد حالت اول تقسیم لگاریتم عدد بزرگتر از واحد است بر عدد صحیح در اینصورت عمل را مانند تقسیم عدد اعشاری بر عدد صحیح بجا میآورند مثلاً $\frac{6,81783}{3} = 2,27261$ حالت دوم تقسیم لگاریتم عدد کوچکتر از واحد است بر عدد صحیح در این حالت اگر مفسر منفی لگاریتم قابل قسمت بر عدد صحیح مفروض باشد عمل تقسیم را مانند فوق مجری داشته و در خارج قسمت در فوق عدد قبل از ممیز علامت منها قرار میدهیم مثلاً $\frac{\bar{5},71425}{5} = \bar{1},14215$ واگر مفسر منفی لگاریتم قابل قسمت بر عدد صحیح مفروض نباشد میبایستی آنقدر آحاد منفیه بر آن

افزوده تا قابل قسمت گردد بعد بعدهٔ آحاد منفیه که اضافه نمودیم میبایستی آحاد منفیهٔ صحیح بر مانتیس اضافه نموده و آنوقت در منفی و مانتیس عمل تقسیم را جداگانه بجا آورده و خارج قسمت را بهم ربط داد مثلاً

$$\frac{\bar{۲}/۷۱۸۲۵}{۵} = \frac{۴+۰/۷۱۸۲۵-۳+۳}{۵} = \frac{-۵+۳/۷۱۸۲۵}{۵} = \frac{-۵}{۵} + \frac{۳/۷۱۸۲۵}{۵}$$

$$= -۱ + ۰/۷۴۳۶۵ = \bar{۱}/۷۴۳۶۵$$

ثالثاً تقسیم لگاریتم بر لگاریتم – در صورتیکه لگاریتم مقسوم و لگاریتم مقسومٌ علیه هر دو مثبت باشد عملاً مانند تقسیم عدد اعشاری بر اعشاری بجا میآوریم

مثلاً $$\frac{۳/۴۹۱۲۲}{۱/۷۴۵۶۱} = ۲$$

امّا اگر مقسوم یا مقسومٌ علیه یا هر دو لگاریتم عدد کوچکتر از واحد باشند بجای آنها کلگاریتم قرار داده و عملاً مانند حالت فوق بجا میآوریم

$$\frac{\bar{۳}/۴۵۷۲۳}{۲/۶۷۸۹۱} = \frac{-(۲/۵۴۲۷۷)}{۲/۶۷۸۹۱} = -\frac{۲/۵۴۲۷۷}{۲/۶۷۸۹۱} = -۱/۰۰۰۰$$

$$\frac{\bar{۳}/۳۱۷۸۴}{\bar{۳}/۳۲۱۰۹} = \frac{-(۳/۶۸۲۱۶)}{-(۲/۶۷۸۹۱)} = \frac{۳/۶۸۲۱۶}{۳/۶۷۸۸۱} = ۱/۰۰۰۰$$

۳۴ – مسئله – لگاریتم عدد A در دستگاهی که بمبنای a است در دست میباشد مطلوب است لگاریتم A در دستگاهی که بمبنای b میباشد

اگر فرض نمائیم که x لگاریتم مجهول A باشد در دستگاهی بمبنای b میتوان رابطهٔ ذیل را نوشت $A = b^{x}$

(زیرا که لگاریتم هر عدد A در دستگاه بمبنای b عددیست که چون b را بقوهٔ آن عدد برسانیم عدد معروض A حاصل شود) حال اگر از طرفین تساوی فوق لگاریتمی که بمبنای a باشد استخراج نمائیم حاصل میشود

$$x = \frac{1}{\log b_a} \times \log A_a \quad ; \quad x \log b_a = \log A_a$$

و چون بفرض $x = \log A_b$ پس $\log A_b = \frac{1}{\log b_a} \times \log A_a$ (1)

یعنی که بجهت بدست آوردن لگاریتم A در دستگاهی که بمبنای b باشد میبایستی لگاریتم سابقش را در مقدار ثابت $\frac{1}{\log b_a}$ ضرب نمود و این مقدار ثابت را مُدول مینامند

چون در تساوی (1) A را مساوی a اختیار نمائیم حاصل میشود $\log a_b = \frac{1}{\log b_a}$ یعنی که مُدول مساویست با لگاریتم مبنای دستگاه قدیم در دستگاه جدید

مثلاً بجهة تبدیل لگاریتم اعشاری بلگاریتم نپری کافیست که لگاریتم اعشاری را در عکس $\log e$ و یا در $l\,10$ ضرب نمود

$$\left(\frac{1}{\log e} = L10 = 2,302585092940\right)$$

(L علامت لگاریتم نپری است)

تبصرة - طرز تشکیل جدول لگاریتم — از روی قضیهٔ ۴ (نمرهٔ ۳۱) میتوان بسهولت فهمید که برای تشکیل جدول لگاریتمی کافیست که لگاریتم اعداد محصوره مابین یک و ده راحساب نمود چون لگاریتم یک مساوی صفر و لگاریتم ده مساوی واحداست پس رشتهٔ اعداد ذیل را که تدریجاً بسمت صفر میل مینمایند مینویسند

1 و $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{8}$ و $\frac{1}{16}$ و $\frac{1}{32}$ و ...... $\left(\frac{1}{2^n}\right)$ و .....

و حساب میکنند اعدادی را که اعداد فوق لگاریتم آنها باشند بر وفق تعریفی که در مسئله (نمرهٔ ۳۴) نموده‌ایم عددیکه لگاریتم آن مثلاً $\frac{1}{4}$ میباشد عبارتست از $10^{\frac{1}{4}}$ ویا $\sqrt[4]{10}$ ویا $\sqrt{\sqrt{10}}$ و همچنین عددیکه لگاریتم آن $\frac{1}{8}$ میباشد عبارتست از $10^{\frac{1}{8}}$ ویا $\sqrt[8]{10}$ ویا $\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}}$ و هکذا میتوان بوسیلهٔ استخراج جذرهای متوالیه اعدادی را که لگاریتمهای آنها رشتهٔ اعداد فوق میباشند حساب نموده و جدولی بطریق مذکور تشکیل داد

امثله

۶۷ - لگاریتمهای مقادیر a و b و c و d بترتیب عبارتست از

$\log a = 2,27300$ ، $\log b = \bar{1},99575$ ، $\log c = \bar{1},98494$

و $\log d = \bar{1},59187$ مطلوب است محاسبهٔ عبارات

$$x = (ab)^3 \times (cd)^2 , \quad x = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt[3]{cd}} , \quad x = \frac{abc}{d}$$

$$x = \left[\sqrt[3]{\frac{ab}{d}}\right]^2 , \quad x = \frac{(abc)^2}{(cd)^3}$$

۶۸ - عبارات ذیل را بوسیلهٔ لگاریتم حساب کنید

$$x = \sqrt[5]{\frac{1}{458} \times 0,036749} , \quad x = \left[\sqrt[3]{895 \times \frac{7}{5}}\right]^5$$

$$x = \frac{\sqrt{35} \times \sqrt[3]{42} \times \sqrt[7]{26400}}{(1,34)^6 \times (34,42)^7}$$

۶۹ - مقادیر رادیکالهای ذیل را بوسیلهٔ لگاریتم بدست آورید

$$x = \sqrt[13]{1,75} , \quad x = \sqrt[7]{0,7776} , \quad x = \sqrt[5]{0,21} , \quad x = \sqrt{\frac{13}{16}}$$

$$x = \sqrt{\frac{6847^3 \times \sqrt[5]{0,01}}{\frac{5}{7} \times 725^6 \times \sqrt{0,678}}} , \quad x = 317,2\sqrt[5]{\frac{23,4130}{2\sqrt{3}}}$$

فصل دوم

معادلات مجهول القوی و معادلات لگاریتمی

۳۵ - تعریف - معادلهٔ مجهول القوه معادله ایست که در آن حرف مجهول نمایندهٔ مقداری معلوم باشد مثلاً اگر a و b نمایش مقادیر مثبته باشند معادله مجهول القوه را میتوان بصورت ذیل نوشت $a^x = b$

بجهت حل این معادله کافیست که از طرفین لگاریتم استخراج نمود

$x \log a = \log b$ یعنی $x = \frac{\log b}{\log a}$

شرط امکان مسئله یعنی برای اینکه معادله دارای ریشه باشد میبایستی که مقادیر a و b هر دو مثبت باشند زیراکه مقادیر منفیه دارای لگاریتم نیستند

مثال ۱ - عدد ۳ را چه قوه برسانیم تا حاصل مساوی ۶۵۶۱ گردد

چون نمایندهٔ مجهول را x فرض نمائیم بر وفق فرض مسئله میبایستی که $3^x = 6561$ باشد و بنابراین $x = \frac{\log 6561}{\log 3}$

چون $\log 6561 = 3{,}81697$ و $\log 3 = 0{,}47712$

پس $x = \frac{3{,}81697}{0{,}47712} = 8$

مثال ۲ - معادله مجهول القوه ذیل را حل کنید $0{,}0043^x = 0{,}718$

چون از طرفین لگاریتم استخراج نمائیم حاصل میشود

$x \log 0{,}0043 = \log 0{,}718$ پس $x = \frac{\log 0{,}718}{\log 0{,}0043}$

و چون $\log 0{,}718 = \bar{1}{,}75612$ و $\log 0{,}0043 = \bar{3}{,}63347$

پس $x = \frac{\bar{1}{,}85612}{\bar{3}{,}63347} = \frac{0{,}14388}{2{,}36653} = 0{,}06$

هرگاه معادله مجهول القوه بصورت ذیل باشد $a^{b^{c^x}} = d$ بجهت حلش مرتباً چنین قرار میدهیم $c^x = z$ (۱) و $b^z = y$ (۲) بنابراین معادله مفروضه نوشته میشود $a^y = d$ (۳) از معادله (۱) نتیجه میشود

$x = \frac{\log z}{\log c}$ و برحسب تساوی ۲ $z = \frac{\log y}{\log b}$ پس

$x = \frac{\log\left(\frac{\log y}{\log b}\right)}{\log c}$ و بر وفق رابطه (۳) $y = \frac{\log d}{\log a}$

پس بالاخره

$$x = \frac{\left[\frac{\log\left(\frac{\log d}{\log a}\right)}{\log b}\right]}{\log c}$$

هرگاه معادله بصورت (۱) $a\alpha^{2x} + b\alpha^x + c = 0$ باشد

بجهة حلش چنین قرار میدهیم $\alpha^x = y$ (۲) بنابراین معادله مفروضه بصورت ذیل نوشته میشود (۳) $ay^2 + by + c = 0$

حال چون از معادله (۳) مقادیر y را حساب کرده و مرتباً در معادله (۲) ببریم معادله (۲) بازاء هر مقدار مثبتی از y یک مقدار بجهت x بدست میاید

که در معادله مفروضه (۱) صدق مینماید باید دانست که شرط حقیقی بودن ریشه های معادله (۱) اینست که ریشه های معادله (۲) حقیقی و مثبت باشند

مثال ۱ - معادله ذیل را حل کنید $5 \times 5^{x} + \frac{125}{5^{x}} = 626$ (۱)

پس از حذف مخارج و نقل جمل بطرف اول چنین خواهیم داشت

$5 \times 5^{2x} - 626 \times 5^{x} + 125 = 0$ و چون قرار دهیم $5^{x} = y$

حاصل میشود $5y^{2} - 626y + 125 = 0$ ریشه های این معادله عبارتند از

$y' = 125$ و $y'' = \frac{1}{5}$ حال چون مقادیر y' و y'' را بترتیب در رابطه

(۲) قرار دهیم چنین خواهیم داشت $5^{x'} = 125$ و یا $x' = 3$ و $5^{x''} = \frac{1}{5}$

و یا $x'' = -1$

مثال ۲ - دستگاه معادلات لگاریتمی

$$\begin{cases} \log x + \log y = d & (1) \\ ax + by = c & (2) \end{cases}$$

را حل کنید

بجهة حل این دستگاه می بینیم که معادلهٔ (۱) را میتوان چنین نوشت

$\log xy = d$ پس $xy = 10^{d}$ (۳) و چون از معادلهٔ (۳)

مقدار y را معین نموده و در معادله (۲) قرار دهیم حاصل میشود

$ax + b \times \frac{10^{d}}{x} = c$ و یا $ax^{2} - cx + b \times 10^{d} = 0$

حال اگر ریشه های این معادله درجه دوم را مرتبا در معادلهٔ (۲) ببریم مقادیر y حاصل میشوند و بدین طریق دستگاه مفروض حل میشود

مثال ۳ - دستگاه دو معادله دو مجهولی لگاریتمی ذیل را حل کنید

$$\begin{cases} (1) \quad \log x + \log = 3 \\ (2) \quad 5x^{2} - 3y^{2} = 11300 \end{cases}$$

و چون مانند مثال ۲ عمل کنیم حاصل میشود $\log xy = 3$ $xy = 10^{3}$

چون مقدار y را از معادله (۳) $xy = 1000$ (۳) استخراج نموده

و در معادله (۲) ببریم حاصل میشود $5x^{4} - 11300x^{2} - 3000000 = 0$

و یا $x^{4} - 2260x^{2} - 600000 = 0$ این معادله دو مجذوری

دارای دو ریشهٔ حقیقی و دو ریشهٔ موهومی است مابین دو ریشه حقیقی فقط میتوانیم

ریشهٔ مثبت $x = 50$ را اختیار نمائیم و در معادلهٔ (۳) بازاء $x = 50$

حاصل میشود $y = 20$

پس ریشه های دستگاه مفروضه عبارتند از $\begin{cases} x = 50 \\ y = 20 \end{cases}$

امثله

۷۰ - معادلات ذیل را حل کنید

$491725^{2x} = 978617$ و $(0/0175)^{x} = 0/000397$

$$\log(7x-9)^2+\log(3x-4)^2=2 \text{ و } \frac{\log(35-x^3)}{5-x}=3 \text{ و}$$

$$\log 5=\log\sqrt{5x+8}+\frac{1}{2}\log(2x+3) \text{ و}$$

$$5^x-\frac{450}{5^x}=7 \text{ و } 7^{x^2-5x+2}=49 \text{ و } 3^{2x-8}=405$$

$$3^{x+1}-\frac{15}{3^{x-1}}+3^{-2}-\frac{47}{3^{x-2}}=0 \text{ و } 9\times 2^{x-3}=192\times 3^{x-3}$$

$$3^{2x}\times 5^{2x-3}=7^{x-1}\times 4^{x+3} \text{ و}$$

۷۱ ـ دستگاه لگاریتمی ذیل را حل کنید

$$\begin{cases}\log x+\log y=1\\ 4x^2+9y^2=3590\end{cases} \text{ و } \begin{cases}\log x+\log y=3\\ 7x+9y=735\end{cases}$$

$$\begin{cases}2\log x+5\log y+\log 5=11\\ 3\log x-2\log y+3\log 2=7{,}5\end{cases}$$

مقالهٔ سوم

مرابحهٔ مرکب و قسط السنین و استهلاک دین

فصل اول

مرابحهٔ مرکب

۳۶ ـ تعریف ـ میگویند که مبلغ c بربح مرکب گذاشته شده هرگاه پس از انقضاء واحد زمان که عموماً سال است (ممکنست واحد زمان را ۶ ماه و ۳ ماه و ۱ ماه اختیار نمود) شخص قرض دهنده ربح مفرد c را مطالبه نماید و آنرا بر سرمایه اضافه نموده و بدین طریق بجهة سال بعد سرمایه جدیدی تشکیل دهد و چون این عمل را در آخر هر سال و در مدت چندین سال تجدید نماید سرمایه‌های متوالیه بسرعت ترقی مینمایند چنانکه پس از مدت بالنسبه قلیلی در ازاء مبلغ جزئی میتوان صاحب سرمایهٔ کلی گشت

همه میدانیم که ربح صد تومان را در یک سال نرخ مرابحهٔ بسیط میگویند و آنرا در دستور مرابحهٔ مفرد بحرف r مینمایند ولی در مرابحهٔ مرکب نرخ عبارتست

از منفعت یک تومان در یک سال و آنرا بحرف r مینمایند $r = \frac{i}{100}$

و یا $i = r \times 100$

مدت مرابحهٔ مکنت مرکب باشد از یک عده سالهای صحیح باضافه کسری از سال عدهٔ سالهای صحیح را به n و کسر سال را به f مینمائیم مثلاً اگر کسر سال سه ماه و بیست روز باشد مقدار چنین خواهد بود $f = \frac{3 \times 30 + 20}{360} = \frac{11}{36}$

زیرا که ماه تجارتی مرکب است از ۳۰ روز و بنابراین سال ، ۳۶۰ روز خواهد بود

دستور اصلی مرابحهٔ مرکب

۳۷ - مسئله ۱ - صرافی مبلغ c تومان از قرار نرخ r بربح مرکب گذاشت تعیین کنید که بعد از انقضاء مدت n سال و کسر f سال اصل و فرع مجموعاً چه مبلغ میشود

ربح یک تومان در یکسال مساویست با r پس بعد از انقضاء یکسال اصل و فرع مبلغ یک تومان مساوی $(1+r)$ میشود و اصل و فرع c تومان میشود $c(1+r)$ پس در ابتدای سال دوم سرمایهٔ صراف عبارت است از $c(1+r)$ و مطابق سال اول این مبلغ در آخر سال دوم اصل و فرع مجموعاً میرسد : $c(1+r) \times (1+r) = c(1+r)^2$ پس در

ابتدای سال سوم سرمایهٔ شخص صراف عبارت است از $c(1+r)^2$ و این مبلغ در آخر سال سوم اصل و فرع مجموعاً میرسد به $c(1+r)^2 \times (1+r) = c(1+r)^3$

و بنابراین در آخر سال n ام سرمایهٔ c اصلاً و فرعاً معادل $c(1+r)^n$ میگردد .

حال میبایستی که ربح مفرد $c(1+r)^n$ را در مدت کسر f سال حساب نموده و بر خودش اضافه نمود تا آنکه سرمایهٔ کل بدست آید چون ربح یک تومان در یک سال مساویست با r پس ربح یک تومان در مدت کسر f سال برابر است با rf و ربح $c(1+r)^n$ در همان مدت f عبارت خواهد بود از : $c(1+r)^n \times fr$ و حال اگر مجموع اصل و فرع مطلوب کل را به A بنمائیم چنین خواهیم داشت

$A = c(1+r)^n + c(1+r)^n \times fr$ و یا $(1)\ A = c(1+r)^n(1+fr)$

عبارت (۱) صورت اصلی دستور ربح مرکب است در حالت کلی و معلوم است اگر $f = 0$ باشد دستور فوق ساده شده چنین میشود $(2)\ A = c(1+r)^n$

دستور معمولی ربح مرکب که بانکها استعمال مینمایند — هر چند که دستور (۱) عمومیت داشته و از روی دلایل صحیح نتیجه شده است لیکن در بانکها

دستور تقریبی ذیل را استعمال مینمایند که محاسبه‌اش سهلتر از دستور (۱) و شبیه است بدستور (۲)

$$(3)\quad A = c(1+r)^{n+f}$$

طریقهٔ پیدا کردن دستور (۳) این است که میگوئیم سرمایهٔ c بعد از انقضاء مدت n سال برحسب دستور (۲) اصلاً و فرعاً معادل $c(1+r)^n$ میشود. و حال بجهة تعیین ربح بسیط این مبلغ در مدت کسر f سال فرض مینمائیم که $f = \frac{p}{q}$ باشد و اگر x ربح بسیط یک تومان باشد در $\frac{1}{q}$ سال اصل و فرع یک تومان پس از انقضاء $\frac{q}{q} = 1$ سال بموجب دستور (۲) چنین خواهد بود $(1+x)^q$ و از طرفی هم اصل و فرع یک تومان در یکسال برابر است با $(1+r)$ پس $(1+r) = (1+x)^q$ و یا $(1+r)^{\frac{1}{q}} = (1+x)$ و بنابراین اصل و فرع یکتومان در مدت $\frac{p}{q}$ سال چنین خواهد بود $(1+r)^{\frac{p}{q}} = (1+x)^p$ و یا $(1+r)^f = (1+x)^p$ و اصل و فرع $c(1+r)^n$ در همین مدت $f = \frac{p}{q}$ عبارت خواهد بود از $c(1+r)^n(1+r)^f$ و یا

$$(3)\quad A = c(1+r)^{n+f}$$

چنانکه قبلاً ذکر نمودیم دستور (۳) فورمولی است تقریبی زیرا دلایلی که بجهة اثبات آن بکار میروند چندان صحیح و دقیق نمیباشند و علت اتخاذش این است که

سبب سهولت محاسبات میباشد.

مثال - مطلوب است تعیین اصل و فرع مبلغ ۷۵۰۰ تومان که از قرار ربح ۵٫۵٪ در مدت شش سال و هشت ماه و ده روز بربح مرکب بوده است

محاسبهٔ A از روی دستور (۱) - چون در دستور (۱) بجای حروف مقادیر عددیه‌شان را قرار دهیم حاصل میشود

$$A = 7500(1+0.055)^6\left(1+\frac{25}{36}\times 0.055\right)$$

زیرا که برحسب فرض مسئله $c = 7500$ و $r = \frac{i}{100} = \frac{5.5}{100} = 0.055$ و $n = 6$ و $f = \frac{8\times 30+10}{360} = \frac{25}{36}$ میتوان تساوی فوق را مختصر نموده و چنین نوشت $A = 7500(1.055)^6\left(\frac{37.375}{36}\right)$

و حال تساوی فوق را به لگاریتم میبریم

$$\log A = \log 7500 + 6\log 1.055 + \log 37.375 + \operatorname{colog} 36$$

و چون مرتباً مقادیر طرف ثانی را حساب نموده و باهم جمع نمائیم حاصل میشود:

$$\begin{aligned}
\log 7500 &= 3.87506\\
6\log 1.055 &= 0.13950\\
\log 37.375 &= 1.57258\\
\operatorname{colog} 36 &= \bar{2}.44370\\
\hline
\log A &= 4.03084
\end{aligned}$$

وچون عدد ما بازاء لگاریتم A را در جدول لگاریتمها حساب کنیم حاصل میشود:

$$A = ۱۰۷۳۶{,}۱۳ \text{ تومان}$$

محاسبهٔ A از روی دستور (۳) - از روی دستور (۳) چنین خواهیم داشت

$$\log A = \log ۷۵۰۰ + (۶ + \frac{۲۵}{۳۶}) \log ۱{,}۵۵$$

$$\log ۷۵۰۰ = ۳{,}۸۷۵۰۶$$

$$(۶ + \frac{۲۵}{۳۶}) \log ۱{,}۰۵۵ = ۶{,}۶۹۴ \times ۰{,}۰۲۳۲۵ = ۰{,}۱۵۵۶۴$$ و

پس $\log A = ۴{,}۰۳۰۷۰$ چون عدد ما بازاء لگاریتم A را در جدول لگاریتمها حساب کنیم حاصل میشود $A = ۱۰۷۳۲{,}۶۷$ تومان چنانکه ملاحظه میشود مقدار جدید A باندازهٔ ۳٫۶۶ تومان کمتر از مبلغ اولی میباشد

مسئله ۲ - چه سرمایه را باید بربح مرکب گذاشت پس از انقضاء مدت n سال وکسر f سال از قرار نرخ r اصلاً وفرعاً معادل مبلغ A گردد

از دستور (۱) حاصل میشود $C = \frac{A}{(1+r)^n(1+fr)}$ وچون این رابطه را بلگاریتم ببریم حاصل میشود

$$\log C = \log A + n\,\mathrm{colog}\,(1+r) + \mathrm{colog}\,(1+fr)$$

مثال - چه سرمایه را باید بربح مرکب گذاشت تا پس از انقضای شش سال وهشت ماه وده روز از قرار ۵٫۵٪ اصلاً وفرعاً مساوی ۱۰۴۵۰ تومان شود

چون در دستور لگاریتمی فوق بجای حروف مقادیر عددیه شانرا قرار دهیم $A = ۱۰۴۵۰$

و $n = ۶$ و $r = \frac{i}{۱۰۰} = \frac{۵{,}۵}{۱۰۰} = ۰{,}۰۵۵$ و $f = \frac{۲۵}{۳۶}$

بنابراین $1 + fr = 1 + \frac{۲۵ \times ۰{,}۰۵۵}{۳۶} = \frac{۳۷{,}۳۷۵}{۳۶}$ حاصل میشود

$$\log C = \log ۱۰۴۵۰ + ۶\,\mathrm{colog}\,۱{,}۰۵۵ + \mathrm{colog}\,۳۷{,}۳۷۵ + \log ۳۶$$

وچون $\log ۱۰۴۵۰ = ۴{,}۰۱۹۱۲$

و $۶\,\mathrm{colog}\,۱{,}۰۵۵ = \bar{۱}{,}۸۶۰۵۰$

و $\mathrm{colog}\,۳۷{,}۳۷۵ = \bar{۲}{,}۴۲۷۴۲$

و $\log ۳۶ = ۱{,}۵۵۶۳۰$

پس $\log C = ۳{,}۸۶۳۳۴$

وحال اگر عدد ما بازاء $\log C$ را از جدول لگاریتمها استخراج کنیم حاصل میشود

$$C = ۷۳۰۰{,}۳۳ \text{ تومان}$$

مسئله ۳ - تعیین کنید بعد از انقضاء چه مدت اصل وفرع مبلغ C از قرار نرخ r معادل مبلغ A میگردد

چون در دستور اصلی $A = c(1+r)^n (1+fr)$ (۱) ملاحظه کنیم می‌بینیم که این معادله شامل دو مجهول n و f میباشد و بنابراین قانوناً حلش غیر ممکن است ولی معذلک بواسطه ملاحظات ذیل میتوان آنرا حل نمود و مجهولات n و f را معین نمود رابطهٔ (۱) را چون بلگاریتم بریم حاصل میشود

$$\log A = \log c + n \log(1+r) + \log(1+fr)$$

و از آنجا

$$\frac{\log A - \log c}{\log(1+r)} = n + \frac{\log(1+fr)}{\log(1+r)} \quad (۲)$$

چون خارج قسمت $(\log A - \log c)$ را بر $\log(1+r)$ مساوی q فرض نموده و باقیماندهٔ تقسیم را به R بنامیم رابطهٔ (۲) را میتوان چنین نوشت

$$(۳) \quad n - q = \frac{R - \log(1+fr)}{\log(1+r)} \quad \text{ویا} \quad q + \frac{R}{\log(1+r)} = n + \frac{\log(1+fr)}{\log(1+r)}$$

طرف اوّل تساوی (۲) عبارت است از تفاضل دو مقدار صحیح پس ممکنست صفر یا مساوی یک مقدار صحیح باشد و چون بطرف ثانی تساوی (۳) ملاحظه نمائیم می‌بینیم که R و $\log(1+fr)$ مقادیری هستند مثبت و هر دو کوچکتر از $\log(1+r)$ میباشند زیرا که R باقیماندهٔ تقسیمی است که در آن $\log(1+r)$ مقسوم علیه میباشد و $\log(1+fr)$ هم کوچکتر است از $\log(1+r)$ زیرا که $(1+fr)$ بواسطهٔ اینکه f مقداریست کوچکتر از واحد کوچکتر است از $(1+r)$ بنابراین طرف ثانی تساوی (۳) هم ممکنست صفر یا مقداری باشد کوچکتر از واحد و چون فرض ثانی ممکن نیست

پس لزوماً طرفین تساوی (۳) مساوی صفر میباشند یعنی $q = n$ و $\log(1+fr) = R$ و حال اگر عدد ما بازاء $\log(1+fr)$ را به l بنامیم حاصل میشود $l = 1 + fr$ و از آنجا $f = \frac{l-1}{r}$

چنانکه ملاحظه میشود مقادیر مجهولات n و f مسئله بطریق فوق بدست آمده و بنابراین حل یک معادلهٔ دو مجهولی (۱) در اینجا ممکن میباشد

تبصرهٔ ۱ — واضح است که اگر مدت مطلوب شامل کسر f سال نباشد در تقسیم $(\log A - \log c)$ بر $\log(1+r)$ باقیماندهٔ R مساوی صفر خواهد شد پس هر وقت در تقسیم $(\log A - \log c)$ بر $\log(1+r)$ باقیمانده صفر شود دلیل است براینکه مدت مطلوب شامل کسر f سال نیست

تبصرهٔ ۲ — میتوان مقادیر n و f را از روی دستور $A = c(1+r)^{n+f}$ بدست آورد بدینطریق که ابتدا دستور مذکور را به لگاریتم برده

$$n + f = \frac{\log A - \log c}{\log(1+r)} \quad \text{ویا} \quad \log A = \log c + (n+f)\log(1+r)$$

امّا باید دانست که مقدار $(n+f)$ که بدینطریق بدست میآید از مقداری که ما سابقاً حساب نموده ایم اختلاف عمده دارد معذلک در محاسبات بواسطهٔ سهولت عمل مقدار $(n+f)$ را بطریق فوق حساب مینمایند

مثال - تعیین کنید بعد از انقضاء چه مدت اصل و فرع مبلغ ۷۳۰۰ تومان از قرار نرخ ۵/۵٪ معادل ار ۱۰۴۴۸ تومان میشود

چون مطابق دستور فوق عمل نمائیم حاصل میشود

$$\frac{\log 10448{,}1 - \log 7300}{\log 1{,}055} = n + \frac{\log(1+f\times 0{,}055)}{\log 10{,}055}$$

و چون $\log 10448{,}1 = 4{,}01904$ و $\log 7300 = 3{,}86332$ و $\log 1{,}055 = 0{,}02325$

پس $\frac{4{,}01904 - 3{,}86332}{0{,}02325} = \frac{0{,}15572}{0{,}02325} = 6^{\text{سال}} + \frac{0{,}01622}{0{,}02325}$

بنابراین $\log(1+f\times 0{,}055) = 0{,}01622$ و چون عدد ما بازاء $\log(1+f\times 0{,}055)$ را از جدول لگاریتم استخراج نمائیم حاصل میشود

$1+f\times 0{,}055 = 1{,}03805$ بنابراین $f = \frac{38{,}05}{55}$

چون بخواهیم f را بحسب ماه حساب نمائیم باید کسر $\frac{38{,}05}{55}$ را در ۱۲ ضرب نمود

$$f = 12 \times \frac{38{,}05}{55} = \frac{456{,}6}{55} = 8 - \frac{16{,}6}{55}$$

و چون بخواهیم جزء کسر ماه را هم حساب کنیم باید $\frac{16{,}6}{55}$ را در ۳۰ ضرب نمود

$$30 \times \frac{16{,}6}{55} = \frac{498}{55} = 9{,}0000 \text{ یا } 10^{\text{روز}}$$

پس مدت مطلوب عبارت است از ۶ سال و ۸ ماه و ۱۰ روز

چون مدت مطلوب را بخواهیم از روی دستور $n+f = \frac{\log A - \log C}{\log(1+r)}$

حساب کنیم چنین خواهیم داشت

$6{,}6976^{\text{سال}} = \frac{0{,}15572}{0{,}02335} = n+f$ و چون کسر ۰/۶۹۷۶ سال را در ۱۲ ضرب نمائیم حاصل میشود $0{,}6976 \times 12 = 8{,}3712^{\text{ماه}}$ و $0{,}3712 \times 30^{\text{روز}} = 11{,}000^{\text{روز}}$ پس مدت مطلوب برحسب این دستور عبارتست از همان ۶ سال و ۸ ماه ولی ۱۱ روز عوض ۱۰ روز حالت اول

مسئله ۴ - از قرار چه نرخی سرمایهٔ C را باید براجه مرکب گذاشت تا پس از انقضاء n سال و کسر f سال اصلاً و فرعاً معادل مبلغ A گردد

رابطه که مابین نرخ مجهول r و معلومات مسئله موجود است همانا معادلهٔ ذیل میباشد

$$(1)\quad A = C(1+r)^n \times (1+fr)$$

و این معادله را چون نسبت بقوای نزولی مجهول r مرتب نمائیم می بینیم که نسبت بآن از درجهٔ $(n+1)$ میباشد و بنابراین مقدار r را نمیتوان از روی حل معادله درجه $(n+1)$ ام فوق حساب نمود و در محاسبات بواسطهٔ قاعدهٔ تقریبات متوالیه مقدار تقریبی بجبه r بدست آورده و بآن قناعت مینمایند

بجهت این عمل رابطهٔ (۱) را بلگاریتم برده چنین مینویسند :

(۲) $\log(1+r) = \frac{\log A - \log C}{n} - \frac{\log(1+fr)}{n}$

اولین مقدار تقریبی اضافی r بدست میآید بطریقی که در رابطهٔ (۲) از جملهٔ دوم طرف ثانی صرف نظر نموده و چنین قرار دهیم $\log(1+r_1) = \frac{\log A - \log C}{n}$

واضح است که بواسطهٔ حذف جملهٔ دوم طرف ثانی مقدار r_1 بزرگتر است از مقدار حقیقی r پس $r < r_1$ و حال اگر در طرف ثانی رابطهٔ (۲) بجای r مقدار معلوم r_1 را قرار دهیم دومین مقدار تقریب نقصانی r بدست میآید از اینقرار

$$\log(1+r_2) = \frac{\log A - \log C}{n} - \frac{\log(1+fr_1)}{n}$$

واضح است که مقدار r_2 کوچکتر است از مقدار حقیقی r زیرا که جملهٔ دوم طرف ثانی بواسطهٔ وجود r_1 که بزرگتر است از r بزرگتر است از مقدار $\frac{\log(1+fr)}{n}$

مقادیر r_1 و r_2 را نسبت به r میتوان چنین نوشت $r_2 < r < r_1$

واگر بجای r یکی از مقادیر r_1 یا r_2 را اختیار نمائیم خطای مرتکبه کوچکتر است از تفاضل $(r_1 - r_2)$ و چون در طرف ثانی رابطهٔ (۲) بجای r مقدار معلوم r_2 را قرار دهیم سومین مقدار تقریب اضافی r بدست میآید که عبارتست از r_3 واگر در طرف ثانی رابطهٔ (۲) r_3 را قرار دهیم چهارمین مقدار تقریب نقصانی r_4 بدست میآید و قس علیهذا و در محاسبات بجای r مقدار

$\frac{r_1 + r_2}{2}$ یا $\frac{r_3 + r_4}{2}$ را اختیار مینمایند

تبصرة - از روی دستور معمولی $A = C(1+r)^{n+f}$ هم میتوان مقدار تقریبی r را بدست آورد و از این قرار ابتدا دستور فوق را بلگاریتم برد و بعد چنین نوشت $\log A = \log C + (n+f)\log(1+r)$

$$\log(1+r) = \frac{\log A - \log C}{n+f}$$

مثال - از قرار چه نرخی سرمایه ۷۳۰۰ تومان را باید بمرابحهٔ مرکب گذاشت تا پس از انقضاء مدت ۶ سال و هشت ماه و ده روز اصل و فرعش مجموعاً ۱۰۴۴۸٫۱ تومان شود

چون مطابق قاعدهٔ مذکورهٔ فوق عمل کنیم مرتباً چنین خواهیم داشت

$$\log(1+r) = \frac{\log 10448{,}1 - \log 7300}{6} - \frac{\log(1+\frac{25}{36}r)}{6}$$

اولین مقدار تقریبی r - $\log(1+r_1) = \frac{\log 10448{,}1 - \log 7300}{6} = 0{,}02595$

وچون عدد مابازاء $\log(1+r_1)$ را از جدول استخراج نمائیم حاصل میشود $r_1 = 0{,}061579$ تقریب اضافی از r میباشد

دومین مقدار تقریبی r_2 - $\log(1+r_2) = 0{,}02595 - \frac{\log(1+\frac{25}{36}\times 0{,}061579)}{6}$

$$\log = 0{,}02595 - \frac{\log(36+25\times 0{,}061579) - \log 36}{6}$$

$$= 0.02595 - \frac{\log(36+25\times0.061579)}{6} + 0.25938$$

$$= 0.28533 - \frac{\log(36+25\times0.061579)}{6}$$

وچون $36+25\times0.061579=37.53947$ و $\frac{\log 37.53947}{6}=0.26241$

پس $\log(1+r_2)=0.02292$ بنابراین $r_2=0.054197$

سومین مقدار تقریبی $\log(1+r_3)=0.28533-\frac{\log(36+25r_2)}{6}$ وچون

$$36+25r_2=36+25\times0.054197=37.35492$$

و $\frac{\log 37.35492}{6}=0.26205$ پس $r_3=0.055062$

چهارمین مقدار تقریبی $\log(1+r_4)=0.28533-\frac{\log(36+25r_3)}{6}$ وچون

$36+25r_3=37.37675$ $\frac{\log 37.37675}{6}=0.26213$

بنابراین $\log(1+r_4)=0.02320$ پس $r_4=0.054879$

وچون $r_3-r_4=0.000183$ پس اگر بجای r یکی از مقادیر r_3 یا r_4 را اختیار نمائیم خطائی که حاصل میشود کمتر است از ۰٫۰۰۰۲ و اگر بجای r مقدار $\frac{r_3+r_4}{2}=0.05497$ را اختیار نمائیم خطای مرتکبه کوچکتر است از ۰٫۰۰۰۱ حال مقدار ۰٫۰۵۴۹۷ را در ۱۰۰ ضرب نموده و میگوئیم که نرخ مطلوب ۵٫۴۹۷٪ میباشد

از روی دستور $\log(1+r)=\frac{\log A-\log C}{n+f}$ مقدار r نیز چنین خواهد بود

$$\log(1+r)=\frac{\log 1044.81-\log 7300}{6+\frac{25}{36}}$$

ویا

$$\log(1+r)=\frac{36\times0.15572}{241}$$

ویا $\log(1+r)=0.02326$ وچون عدد مابازاء $\log(1+r)$ را از جدول استخراج کنیم حاصل میشود $1+r=1.0550$ پس $r=0.0550$

حال اگر r را در صد ضرب نمائیم نرخ مطلوب بدست میآید و آن عبارتست از ۵٫۵٪

تبصره – نتایجی را که ما تاکنون در مثالهای فوق از استعمال دستور معمولی $A=C(1+r)^{n+f}$ بدست آورده ایم چندان اختلاف زیادی با نتایج حاصله از دستور اصلی $A=C(1+r)^n(1+fr)$ ندارند و علاوه براین چون استعمال دستور معمولی سبب سهولت محاسبات میباشد بدینجهت غالباً در محاسبات همان دستور معمولی را بکار میبرند

امثله

۷۲ – مطلوب است تعیین اصل و فرع یک تومان که از قرار نرخ ۴٪ در مدت هزار سال بربح مرکب گذاشته شده باشد

۷۳ – چه سرمایه را باید بربح مرکب گذاشت تا پس از انقضاء مدت ۷۵ سال

از قرار نرخ ۴٪ اصلاً و فرعاً مساوی صد هزار تومان گردد

۷۴ - تعیین کنید بعد از انقضاء چند سال اصل و فرع دو هزار تومان از قرار نرخ ۴٪ مساوی پنجهزار تومان میشود (در صورتیکه معامله ربح مرکب باشد)

۷۵ - تعیین کنید بعد از انقضاء مدت چند سال سرمایه که از قرار نرخ ۵٪ بمرابحهٔ مرکب گذاشته شده است مضاعف میگردد

۷۶ - بعد از انقضاء چند سال سرمایه پنج هزار تومان از قرار نرخ ۵٪ و سرمایه هشت هزار تومان از قرار نرخ ۲٫۵٪ باید بمرابحهٔ مرکب گذاشته شوند تا آنکه اصلاً و فرعاً مساوی یکدیگر گردند

۷۷ - از قرار چه نرخی سرمایهٔ چهار هزار تومان را باید در مدت ۱۲ سال بمرابحهٔ مرکب گذاشت تا آنکه اصلاً و فرعاً مساوی ۷۲۳۵٫۵ تومان گردد

۷۸ - بعد از انقضاء چند سال سرمایهٔ که از قرار نرخ ۳٫۵٪ بربح مرکب گذاشته شده سه برابر میگردد

۷۹ - از قرار چه نرخی باید سرمایه را بربح مرکب گذاشت تا پس از انقضای سی و یک سال چهار برابر گردد .

فصل دوم

قسط السنین و استهلاک دین

۳۸ - **تعریف** - قسط السنین عبارت از این است که شخص در اول یا در آخر هر سال و در مدت چندین سال مبلغ ثابتی را از قرار نرخ ثابتی (مدت معین مذکوره عموماً سال است) بمرابحهٔ مرکب میگذارد خواه بجهت تشکیل سرمایه خواه بجهة مستهلک ساختن قرضی پس از این تعریف معلوم میشود که قسط السنین بر دو قسم است : اولاً قسط السنین بجهة تشکیل سرمایه در این صورت اقساط سالیانه در اول هر سال پرداخته میشوند . ثانیاً قسط السنین بجهة استهلاک دین در این حالت اقساط سالیانه در آخر هر سال پرداخته میشوند

اولاً قسط السنین بجهة تشکیل سرمایه

۳۹ - مسئله ۱ - شخصی در اول هر سال و در مدت n سال مبلغ ثابت a تومان از قرار نرخ r بمرابحهٔ مرکب میگذارد و میخواهد بداند که پس از انقضاء مدت مفروض صاحب چه سرمایه میشود

قسط السنهٔ اول a که در ابتدای سال اول پرداخته میشود در مدت n سال
از قرار نرخ r بمرابحهٔ مرکب خواهد ماند پس در آخر سال n ام اصلاً و فرعاً
معادل $a(1+r)^n$ میگردد

قسط السنهٔ دوم a که در ابتدای سال دوم پرداخته میشود در مدت $(n-1)$
سال از قرار همان نرخ بمرابحهٔ مرکب میماند پس در آخر سال $(n-1)$ ام اصلاً
و فرعاً معادل $a(1+r)^{n-1}$ خواهد شد و هکذا بطوری که آخرین
قسط السنه a فقط در مدت یکسال بمرابحهٔ مرکب خواهد ماند پس در آخر
سال اصل و فرعش مجموعاً مساوی $a(1+r)$ میشود و حال اگر مجموع کل اصل
و فرعهای جزئیه را به S بنمائیم چنین خواهیم داشت

$$S = a(1+r)^n + a(1+r)^{n-1} + \dots + a(1+r)^2 + a(1+r)$$

و یا

$$S = a(1+r) + a(1+r)^2 + \dots + a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^n$$

جمل حاصل جمع فوق عبارتند از جمل یک تصاعد هندسی که جملهٔ اولش $a(1+r)$
و قدر نسبتش $1+r$ و عدهٔ جملش n میباشد پس بر وفق دستور
$S = \frac{a(q^n-1)}{q-1}$ میتوان آنرا چنین نوشت $S = \frac{a(1+r)[(1+r)^n-1]}{(1+r)-1}$
یا (۱) $S = \frac{a(1+r)[(1+r)^n-1]}{r}$ و چون دستور (۱) را

بلگاریتم بریم حاصل میشود
(۲) $\log S = \log a + \log(1+r) + \log[(1+r)^n-1] + \operatorname{colog} r$

مثال - شخصی در اول هر سال و در مدت بیست سال مبلغ ثابت ۵۶۰ تومان را
قرار نرخ ۳٪ بعنوان قسط السنین بمرابحهٔ مرکب گذاشت و میخواهد بداند که پس از
انقضاء مدت بیست سال صاحب چه سرمایه ایست

چون در رابطهٔ لگاریتمی (۲) بجای حروف مقادیر عددیه‌شان را قرار دهیم حاصل میشود
$\log S = \log ۵۶۰ + \log ۱,۰۳ + \log(۱,۰۳^n - ۱) + \operatorname{colog} ۰,۰۳$
ابتدا برای اجرای محاسبهٔ فوق بایستی $(۱,۰۳^n - ۱)$ را حساب نموده و بجهت
این عمل در جدولهای لگاریتم مثلاً در صفحهٔ ۱۳۴ لگاریتم Dupuis مقدار
$۱,۰۳^{۲۰}$ را عیناً یافته می‌بینیم که $۱,۰۳^{۲۰} = ۱,۸۰۶۱۱۱$ و بنابراین
$۱,۰۳^{۲۰} - ۱ = ۰,۸۰۶۱۱۱$ و بعد مرتباً مقادیر ذیل را حساب مینمائیم

$\log ۵۶۰ = ۲,۷۴۸۱۹$

$\log ۱,۰۳ = ۰,۰۱۲۸۴$

$\log ۰,۸۶۰۱۱۱ = \bar{۱},۹۰۶۴۵$

$\operatorname{colog} ۰,۰۳ = ۱,۵۲۲۸۸$

$\log S = ۴,۱۹۰۳۶$

و چون عدد ما بازاء $\log S$ را از جدول استخراج نمائیم حاصل میشود

$S = ۱۵۵۰۱$ تومان

چنانکه ملاحظه میشود محاسبهٔ S از روی لگاریتم تا اندازهٔ صعب و دشوار است

و بهمین جهت است که در ممالک خارجه در دوایر مالیه و بانک جداول مخصوصی

از عبارت $\frac{(1+r)\left[(1+r)^n-1\right]}{r}$ بازاء مقادیر متداوله r و n تشکیل

داده اند و بنابراین بجهت پیدا کردن S کافیست که قسط السنه a را در

مقدار $\frac{(1+r)\left[(1+r)^n-1\right]}{r}$ که در جدول مذکور موجود است ضرب نمود.

مسئلهٔ ۲ - چه قسط السنهٔ a باید در اول هر سال و در

مدت n سال از قرار نرخ r ادا نمود تا آنکه پس از

انقضاء مدت مفروض صاحب سرمایهٔ S باشیم

از دستور (۱) میتوان چنین داشت $rS = a(1+r)\left[(1+r)^n-1\right]$

و یا $a = \frac{rS}{(1+r)\left[(1+r)^n-1\right]}$ و چون این رابطه را به لگاریتم بریم حاصل میشود

$$\log a = \log S + \log r + \operatorname{colog}(1+r) + \operatorname{colog}\left[(1+r)^n-1\right]$$

مثال - چه قسط السنه a باید در ابتدای هر سال و در مدت سی سال از قرار

نرخ ۳٪ ادا نمود تا آنکه پس از انقضای سی سال صاحب سرمایهٔ باشیم معادل

۲۰٫۰۰۰ تومان

چون در رابطهٔ لگاریتمی فوق بجای حروف مقادیر عددیه شان از قرار دهیم حاصل میشود

$$\log a = \log ۲۰۰۰۰ + \log ۰٫۰۳ + \operatorname{colog} ۱٫۰۳ + \operatorname{colog}\left[۱٫۰۳^{۳۰}-۱\right]$$

و چون

$\log ۲۰۰۰۰ = ۴٫۳۰۱۰۳$

$\log ۰٫۰۳ = \bar{۲}٫۴۷۷۱۲$

$\operatorname{colog} ۱٫۰۳ = \bar{۱}٫۹۸۷۱۶$

$\operatorname{colog}\left[۱٫۰۳^{۳۰}-۱\right] = \operatorname{colog} ۱٫۴۲۷۲۶ = \bar{۱}٫۸۴۵۵۰$

$\log a = ۲٫۶۱۰۸۱$

و حال اگر عدد ما بازاء $\log a$ را در جدول حساب کنیم حاصل میشود $a = ۴۰۸٫۱۴$ تومان

مسئله ۳ - در چند مدت باید قسط السنهٔ ثابت a را

از قرار نرخ r در ابتدای هر سال ادا نمود تا آنکه پس از انقضاء

مدت مطلوب صاحب سرمایهٔ باشیم معادل با مبلغ S

از دستور $S = \frac{a(1+r)\left[(1+r)^n-1\right]}{r}$ میتوان چنین داشت

$Sr + a(1+r) = a(1+r)^{n+1}$ و یا $Sr = a(1+r)^{n+1} - a(1+r)$

و چون رابطهٔ فوق را به لگاریتم ببریم حاصل میشود :

$$\log[Sr+a(1+r)] = \log a + (n+1)\log(1+r)$$

و از آنجا

$$n+1 = \frac{\log[Sr+a(1+r)]+\operatorname{colog} a}{\log(1+r)}$$

مقدار n که بطریق فوق بدست میآید باید عدد صحیح باشد و اگر کسری باشد بجهة n قسمت صحیحش را اختیار کرده و حساب مینمائیم سرمایهٔ S را که در این مدت از ادای قسط السنه a حاصل میشود و میگوئیم که بجهة تشکیل سرمایه S' میبایستی در مدت n سال و در ابتدای هر سال قسط السنهٔ ثابت a را ادا نموده و باضافه در آخر سال n اُم قسطی معادل با $S'-S$ ادا نمود.

مثال - هرگاه در اول هر سال قسط السنه ثابت ۶۰۰ تومان را از قرار نرخ ۴٪ در بانک بگذاریم پس از انقضاء چند سال صاحب سرمایه میشویم معادل با ۳۰٬۰۰۰ تومان

چون در رابطه $n+1 = \frac{\log[Sr+a(1+r)]+\operatorname{colog} a}{\log(1+r)}$ بجای مقادیر حروف عددیشان را قرار دهیم حاصل میشود $Sr = 30000 \times 0{,}04 = 1200$

و $a(1+r) = 600 \times 1{,}04 = 624$ پس $Sr = 1824$

بنابراین $n+1 = \frac{\log 1824 + \operatorname{colog} 600}{\log 1{,}04}$

و چون

$\log 1824 = 3{,}26102$

$\operatorname{colog} 600 = \bar{3}{,}22185$

$\log 1{,}04 = 0{,}01703$

پس $n+1 = \frac{3{,}26102+\bar{3}{,}22185}{0{,}01703} = \frac{0{,}48287}{0{,}01703} = 28{,}0000$ سال

بنابراین $n = 27{,}0000$ سال

پس بجهة n قسمت صحیح ۲۷ سال را اختیار نموده و حساب مینمائیم که در مدت ۲۷ سال با قسط السنه ۶۰۰ تومان و از قرار نرخ ۴٪ چه سرمایه تشکیل میشود چون عمل را مانند مثال مسئله ۲ مجری بداریم حاصل میشود $S = 29390$ تومان

پس میگوئیم که مدت مطلوب عبارت است از ۲۷ سال بشرط آنکه در آخر سال ۲۷ اُم مبلغ $S'-S = 30000 - 29390 = 610$ تومان بر سرمایه که در مدت ۲۷ سال گذشته حاصل شده اضافه نمائیم

چون در دستور $S = \frac{a(1+r)[(1+r)^n-1]}{r}$ نرخ r مجهول باشد مقدار آنرا نمیتوان از روی قواعد مقدماتی تعیین نمود زیرا که چون $(1+r)$ را مساوی x فرض نمائیم دستور (۱) چنین نوشته میشود

$$S = \frac{ax(x^n-1)}{x-1} = ax(x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\cdots+x^2+x+1) = a(x^n+x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x^3+x^2+x)$$

یا

$$ax^n + ax^{n-1}+\cdots+ax^3+ax^2+ax-S=0$$

چنانکه می‌بینیم بجهة تعیین مقدار x میبایستی معادله درجه n اُم کامل فوق را حل نمود و آنرا هم وقتیکه n از دو تجاوز نماید نمیتوان بواسطهٔ قواعد مقدماتی

حل نمود و خوشبختانه نیز در محاسبات بندرت اتفاق میافتد که ه مجهول باشد و معذلک اگر اتفاقاً مجهول شد مقدارش را بواسطهٔ تقریبات متواليه حساب مینمایند و بجهة این عمل دستور (۱) را بطریق ذیل مینویسند $\frac{S}{a} = \frac{(1+\text{ه})\left[(1+\text{ه})^{n}-1\right]}{\text{ه}}$

و تحقیق میکنند بازاء چه مقداری از ه طرفین تساوی فوق باهم متساوی میباشند

مثال — از قرار چه نرخی قسط السنهٔ ثابت ۴۰۸٫۱۴ تومان را در اول هر سال و در مدت سی سال باید در بانک گذاشت تا پس از انقضاء مدت سی سال صاحب سرمایهٔ باشیم معادل با ۲۰۰۰۰ تومان ؟

چون در رابطه $\frac{S}{a} = \frac{(1+\text{ه})\left[(1+\text{ه}2)^{n}-1\right]}{\text{ه}}$ بجای حروف مقادیر عددیه شانرا قرار دهیم حاصل میشود

$$\frac{20000}{408,14} = \frac{(1+\text{ه})\left[(1+\text{ه})^{30}-1\right]}{\text{ه}}$$

و یا

$$49 = \frac{(1+\text{ه})\left[(1+\text{ه})^{30}-1\right]}{\text{ه}}$$

حال تحقیق مینمائیم که بازاء چه مقدار ه طرف ثانی تساوی فوق تقریباً مساوی ۴۹ میشود و پس از ابتدا به حدس ه را مساوی ۰٫۰۴ اختیار می نمائیم و می بینیم که بازاء ۰٫۰۴ = ه مقدار $\frac{(1+\text{ه})\left[(1+\text{ه})^{30}-1\right]}{\text{ه}}$ مساوی است با ۵۸٫۳۲۸ و چون این عدد با ۴۹ اختلاف عمده دارد پس مقداری که بجهة ه اختیار مینمائیم از مقدار حقیقی آن خیلی بزرگتر است و حال ه را مساوی ۰٫۰۳

فرض نمائیم و می بینیم که بازاء ۰٫۰۳ = ه مقدار $\frac{(1+\text{ه})\left[(1+\text{ه})^{30}-1\right]}{\text{ه}}$ مساویست با ۴۹٫۰۱۰۸ و چون این مقدار با عدد ۴۹ دارای اختلاف زیادی نیست پس میتوانیم بگوئیم که مقدار تقریبی ه مساویست با ۰٫۰۳ و بهمین قناعت مینمائیم

۴۰ — **تنخواه نقلی** — و آن عبارت از اینست که شخصی عوض آنکه در اول هر سال و در مدت n سال قسط السنهٔ ثابت a را از قرار نرخ ه بجهة تشکیل سرمایه بدهد. میخواهد در همان ابتدای سال اوّل مبلغی باسم تنخواه نقلی یکمرتبه پرداخته و خود را از ادای اقساط سالیانه مستخلص نماید

چون مبلغ مطلوب را به V بنمائیم باید چنین داشت

$V(1+\text{ه})^{n} = \frac{a(1+\text{ه})\left[(1+\text{ه})^{n}-1\right]}{\text{ه}}$ و از آنجا

$V = \frac{a(1+\text{ه})\left[(1+\text{ه})^{n}-1\right]}{\text{ه}(1+\text{ه})^{n}}$ و یا $V = \frac{a}{\text{ه}}(1+\text{ه})\left[1-\frac{1}{(1+\text{ه})^{n}}\right]$

در سالنامه های ممالک متمدّنه بجهة سهولت محاسبات جداولی ترتیب داده اند که در آنها مقادیر $(1+\text{ه})\left[1-\frac{1}{(1+\text{ه})^{n}}\right]$ بازاء مقادیر معموله ه و n ثبت میباشد

ثانیاً قسط السنین بجهة استهلاک دین

۴۱ — **مسئله** — شخصی مبلغ E تومان از قرار نرخ ه

بربح مرکب قرض نموده و میخواهد آنرا بواسطهٔ ادای n قسط السنه متساوی در آخر هر سال مستهلک نماید مطلوبست مقدار قسط السنهٔ مجهول a

مبلغ قرض E پس از انقضاء n سال اصلاً و فرعاً معادل $E(1+r)^n$ میگردد اولین قسط مجهول a که در آخر سال اول پرداخته میشود مدت $(n-1)$ سال بربح مرکب خواهد بود پس اصلاً و فرعاً معادل $a(1+r)^{n-1}$ خواهد شد دومین قسط a که در آخر سال دوم پرداخته میشود مدت $(n-2)$ سال بربح مرکب خواهد بود بنابراین پس از انقضاء مدت $(n-2)$ سال اصل و فرعش مجموعاً مساوی $a(1+r)^{n-2}$ میشود خلاصه آخرین قسطی که در آخر سال n ام پرداخته میشود چون هیچ در مرابحه نمیاند پس مقدارش همان a خواهد بود پس شرط مستهلک شدن قرض E اینست که

$$E(1+r)^n = a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^{n-2} + \cdots + a(1+r) + a$$

ویا

$$E(1+r)^n = a + a(1+r) + \cdots\cdots + a(1+r)^{n-2} + a(1+r)^{n-1}$$

و چون جمل ثانی تساوی فوق عبارتست از جمل یک تصاعد هندسی که جملهٔ اولش a و قدر نسبتش $(1+r)$ و عدهٔ جملش n است پس میتوان رابطهٔ فوق را ساده نموده بصورت ذیل نوشت

$$E(1+r)^n = \frac{a[(1+r)^n - 1]}{r}$$

و از آنجا

$$(1)\quad a = \frac{Er(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

چنانکه ملاحظه میشود دستور (۱) شامل مقادیر a و E و r و n میباشد و اگر سه تای از این مقادیر معلوم باشند میتوان مقدار مجهول چهارم را تقریباً یا تحقیقاً حساب نمود بنابراین ممکنست که چهار مسئلهٔ مختلفه طرح نمود چون حل این مسائل بکلی مشابه است با حل مسائلی که ما در باب قسط السنین (بجهة تشکیل سرمایه) حل و بحث نموده ایم لذا از آنها صرف نظر نموده و فقط به بیان تبصره های ذیل قناعت مینمائیم

تبصرهٔ ۱ - چون دستور (۱) را بصورت $a\left[1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right] = Er$ نوشته و فرض نمائیم که $n = \infty$ باشد مقدار $\frac{1}{(1+r)^n}$ صفر شده و چنین خواهیم داشت $a = Er$ یعنی که قسط السنهٔ a مساویست بربح سالیانه قرض E و بدیهی است که در این صورت قرض مفروض ابداً مستهلک نمیشود و شخص قرض دهنده میتواند مادام الحیات هر سال مبلغ a تومان از شخص مقروض گرفته بدون آنکه تغییری در سرمایه اش عارض شود

تبصرهٔ ۲ - هرگاه در دستور (۱) r را مساوی صفر فرض نمائیم مقدار a بصورت مبهم $\frac{0}{0}$ در میآید ولیکن این ابهام ظاهریست و بجهة رفع آن ابتدا دستور (۱) را چنین مینویسیم

$$a = \cfrac{Er(1+r)^n}{\cfrac{r[(1+r)^n - 1]}{r}}$$

چون بدقت در عبارت

$\frac{(1+r)^n-1}{r}$ ملاحظه نمائیم می‌بینیم که عبارتست از حاصل جمع تصاعد هندسی ذیل

$$\div\div\ 1 : (1+r) : (1+r)^2 : \dots : \dots\dots (1+r)^{n-2} : (1+r)^{n-1}$$

و بنابراین رابطهٔ فوق را میتوان چنین نوشت

$$a = \frac{E\,(1+r)^n}{1+(1+r)+(1+r)^2+\dots\dots+(1+r)^{n-2}+(1+r)^{n-1}}$$

و حال اگر r را مساوی صفر اختیار نمائیم حاصل میشود $a = \frac{E}{n}$ یعنی اگر شخص قرض دهنده مطالبهٔ ربح نکند بجهة استهلاک قرضش کافی است که در مدت n سال در آخر هر سال قسطی معادل با $\frac{E}{n}$ ادا نمود

تبصرهٔ ۳ ـ چون در دستور (۱) مدت n مجهول باشد میتوان آنرا بطریق ذیل پیدا نمود

اولاً دستور (۱) را چنین مینویسیم $Er(1+r)^n = a(1+r)^n - a$

و یا $a = (a - Er)(1+r)^n$ و چون عبارت فوق را به لگاریتم بریم حاصل میشود

$$n \log(1+r) + \log(a - Er) = \log a$$

و از آنجا

$$n = \frac{\log a - \log(a - Er)}{\log(1+r)}$$

از این رابطه میتوان بسهولت استنباط نمود که شرط امکان مسئله این است که مقدار $(a - Er)$ منفی نباشد زیرا که اعداد منفیه دارای لگاریتم نیستند و علاوه براین

واضح است که اگر بخواهیم قرض ما بواسطهٔ ادای n قسط السنه مساوی a مستهلک شود میبایستی که مقدار هر قسط السنه a بزرگتر از ربح سالیانهٔ Er مبلغ استقراض باشد و اگر مبلغ a کوچکتر از Er باشد ابداً قرض مستهلک نمیشود و بلکه آن با مقدارش ترقی نموده و ممکن است بی اندازه زیاد شود

مثال ـ شخصی مبلغ ۲۵۰۰۰ تومان از قرار نرخ ۳٪ بربح مرکب قرض نمود و میخواهد بواسطهٔ ادای سی قسط السنهٔ متساوی آنرا مستهلک نماید مطلوبست مقدار قسط السنهٔ مجهول ؟

چون دستور (۱) را به لگاریتم برده و بجای حروف مقادیر عددیه‌شان را قرار دهیم حاصل میشود

$$\log a = \log 25000 + \log 0{,}03 + 30 \log 1{,}03 + \operatorname{colog}(1{,}03^{30} - 1)$$

و چون

$$\log 25000 = 4{,}39794$$

$$\log 0{,}03 = \bar{2}{,}47712$$

$$30 \log 1{,}03 = 0{,}38250$$

$$\operatorname{colog}(1{,}03^{30} - 1) = \operatorname{colog} 1{,}428 = \bar{1}{,}84527$$

$$\log a = 3{,}10553$$

واگر عدد مابازاء $\log a$ را از جدول استخراج نمائیم حاصل میشود

$a = ۱۲۵/۰۷$ تومان

امثله

۸۰ - دار التجارهٔ از بانک مبلغ ده هزار تومان قرض نموده و میخواهد ٪ این قرض را بواسطهٔ ده قسط السنهٔ متساوی مستهلک نماید مطلوب است تعیین مقدار قسط السنه درصورتیکه بدانیم اولین قسط السنه بعد از انقضاء ده سال پرداخته شده و نرخ معامله هم ۴٪ میباشد.

۸۱ - شخصی از دار التجارهٔ مبلغ دو هزار تومان از قرار نرخ ۵٪ قرض نموده و میخواهد آنرا بواسطهٔ ادای دوازده قسط السنه متساوی مستهلک نماید تعیین نمائید که در آخر چهارم چه مبلغی یکمرتبه پرداخته و خود را از تأدیهٔ اقساط سالیانه مستخلص کرده و قرضش نیز مستهلک گردد.

۸۲ - شخصی در مدت پانزده سال و در ابتدای هر سال مبلغ ثابتی از قرار نرخ ۵٪ در بانک بربح مرکب گذاشته و در آخر سال پانزدهم صاحب سرمایهٔ شد معادل با ۴۵۳۱/۸ تعیین کنید که هر سال چه مبلغی

می پرداخت.

۸۳ - تجارتخانه در اول حمل ۱۲۹۴ مبلغ ۳۴۶۴۰ تومان از بانک قرض نموده و بواسطهٔ ادای دو قسط متساوی با ۹۹۴۸/۱ تومان یکی در اول حمل ۱۲۹۶ و دیگری در اول حمل ۱۲۹۸ قرضش را مستهلک نمود مطلوب است تعیین نرخ معامله

۸۴ - شخصی در ابتدای هر سال و در مدت بیست و پنج سال مبلغ سیصد تومان از قرار نرخ ۴٪ ببرانچهٔ مرکب گذاشت یک سال بعد از ادای آخرین قسط السنه شروع نمود باینکه سالیانه مبلغ ششصد تومان مسترد بدارد و این عمل را مدت ده سال مداومت نمود میخواهیم تعیین کنید که بعد از انقضاء ده سال طلب او چه مبلغ میشود

حیلهٔ جبری — اثبات تساوی اعداد ۱ و ۲

فرض میکنیم که a و b نمایش دو عدد متساوی باشند پس $ab = a^2$ و یا $ab - b^2 = a^2 - b^2$ و یا $b(a-b) = (a-b)(a+b)$ و از آنجا $b = a + b$ و یا $b = 2b$ و بنابراین ۲=۱ فهو المطلوب

مقالهٔ چهارم

مشتقات و مورد استعمال آن در تعیین جهة تغییرات توابع

فصل اوّل

مشتقات

۴۲ - تعریفات - وقتی که مقدار متغیری از یک مقدار a موسوم بمقدار اوّلی تغییر کرده برسد بمقدار b موسوم بمقدار آخری گویند که نموّ متغیر مفروض در فاصلهٔ (a و b) عبارت است از فضل مقدار آخری b بر مقدار اوّلی a یعنی ($b - a$) مثلاً اگر متغیر x متوالیاً مقادیر $x = 1$ و $x = 3$ را اختیار نماید درصورتیکه ۱ مقدار اوّلی و ۳ مقدار آخری آن باشد نموّش در فاصلهٔ (۱ و ۳) مساوی است با ۲ = ۱ - ۳

نموّ هر مقدار متغیری ممکن است مثبت یا منفی یا مساوی صفر باشد بر حسب آنکه مقدار آخری بزرگتر یا کوچکتر یا مساوی مقدار اوّلی است

از تعریف فوق میتوان چنین استنباط کرد که مقدار آخری مساویست بمقدار

اوّلی باضافهٔ نموّ پس اگر مقدار نموّ را به h بنمائیم چنین خواهیم داشت

$h = b - a$ و از آنجا $b = a + h$

بجهة نمایش نموّ مقدار متغیری قاعده آنست که ابتدا حرف یونانی Δ (دلتا) را نوشته و بعد حرفی را که نمایش آنمقدار متغیر مفروض است مینویسند مثلاً Δx علامت نموّ x و Δy علامت نموّ y میباشد و باید دانست که علامت Δx یا Δy نمایش یک عدد است و نباید آنها را حاصل ضرب Δ در x یا در y دانست

۴۳ - نموّ تابع - فرض میکنیم که y تابعی از متغیر x باشد $y = f(x)$ و فرض مینمائیم که بازاء $x = a$ مقدار $y = A$ و بازاء $x = b$ مقدار $y = B$ باشد متغیر x چون از مقدار اوّلی a برسد بمقدار آخری b تابع y نیز از مقدار اوّلی A میرسد بمقدار آخری B پس نموّ متغیر در فاصلهٔ (a و b) عبارتست از $\Delta x = b - a$ و نموّ تابع در فاصلهٔ (A و B) عبارتست از $\Delta y = B - A$ و میگویند که بازاء $\Delta x = b - a$ نموّ متغیر نموّ تابع مساویست با $\Delta y = B - A$ یعنی هر نموّی از متغیر نظیر است با نموّی از تابع و بالعکس

مثلاً در تابع $y = 2x - 3$ بازاء $x = 1$ مقدار $y = -1$ و بازاء $x = 4$ مقدار $y = 5$ پس نموّ متغیر وقتیکه x از ۱ برسد به ۴ عبارتست از $\Delta x = 4 - 1 = 3$ و نموّ نظیر آن از تابع مساویست با $\Delta y = 5 - (-1) = 6$ و همچنین در تابع $y = x^2 + x + 1$ بازاء $x = -2$ مقدار $y = 3$ و بازاء $x = -1$ مقدار $y = 1$ بنابراین نموّ متغیر عبارتست از $\Delta x = -1 - (-2) = +1$ و نموّ تابع که نظیر نموّ متغیر میباشد عبارت است از $\Delta y = 1 - 3 = -2$

۴۴ - حدود مقادیر متغیره - گویند که l حدّ مقدار متغیر y است و یا اینکه y میل میکند بسمت l هرگاه y بتواند آنقدر نزدیک شود به l که بخواهیم و یا اینکه تفاضل $(y - l)$ بحسب قدر مطلق آنقدر کوچک شود که بخواهیم مثلاً در تابع $y = 3 - 2x$ حدّ y وقتیکه متغیر x میل کند بسمت صفر عبارت است از عدد ۳ زیرا که تفاضل $(y - 3)$ که بحسب مقدار مطلق مساویست با قدر مطلق $2x$ میتواند آنقدر کوچک شود که بخواهیم مثلاً قدر مطلق تفاضل مذکور کوچکتر است از $\frac{1}{1000}$ وقتیکه قدر مطلق x کوچکتر است از $\frac{1}{2000}$ و همچنین اگر قدر مطلق کوچکتر از $\frac{1}{2000000}$ باشد قدر مطلق تفاضل $(y - 3)$ کوچکتر است از $\frac{1}{1000000}$ و هکذا

و همچنین حدّ کسری که مخرجش الی غیر النهایه ترقّی مینماید عبارتست از صفر مثلاً کسر $\frac{1}{x}$ میل میکند بسمت صفر وقتیکه x میل کند بسمت الی غیر النهایه زیرا که بازاء $x = 100$ می‌بینیم که $y = 0.01$ و بازاء $x = 1000$ مقدار $y = 0.001$ و هکذا پس میتوان x را آنقدر بزرگ اختیار نمود که مقدار نظیر y آنقدر نزدیک بصفر شود که بخواهیم باید دانست که :

اوّلاً - هرگاه چندین مقدار متغیر هر یک جداگانه دارای حدّی باشند حدّ حاصل جمع یا حاصل ضربشان مساویست بمجموع یا بحاصل ضرب حدود آنها

ثانیاً - هرگاه دو مقدار متغیر هر یک جداگانه دارای حدّی باشند حدّ خارج قسمتشان مساویست با خارج قسمت حدود آنها مشروط بر اینکه حدّ مخرج مساوی صفر نباشد

۴۵ - تعریف مشتق - هرگاه y تابعی از متغیر x باشد $y = f(x)$ و فرض کنیم که بازاء Δx نموّ متغیر نموّ نظیر تابع مساوی Δy باشد خارج قسمت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (وقتیکه Δx میل کند بسمت صفر) اگر دارای حدّی باشد آن حدّ را مشتق تابع y نامند نسبت بمتغیر x

بنابراین **مشتق هر تابع عبارت است از حد خارج قسمت نمو تابع به نمو نظیرش از متغیر وقتیکه نمو متغیر میل کند بسمت صفر**

پس بر وفق تعریف فوق هرگاه بخواهیم مشتق تابعی را حساب کنیم باید

اولا – به متغیر x نموی داد مانند Δx

ثانیا – نمو نظیر تابع را حساب نمود

ثالثا نمو تابع را به نمو متغیر تقسیم نمود

رابعا – حد خارج قسمت مزبور را وقتیکه نمو متغیر میل کند بسمت صفر معین نمود

چنانکه ملاحظه میشود تعیین مشتق هر تابع بالاخره منجر میشود به تعیین حد خارج قسمت دو مقدار که در آن مخرج میل میکند بسمت صفر پس برای اینکه خارج قسمت مفروض دارای حدی باشد میبایستی که صورتش هم میل کند بسمت صفر زیرا که اگر مخرج کسری میل کند بسمت صفر و صورت مخالف صفر باشد مقدار آن کسر الی غیر النهایه ترقی میکند بنابراین قبل از همه چیز میبایستی کسر نمایش تقسیم نمو تابع به نمو متغیر را به بسیط‌ترین صورت خود تحویل نمود زیرا که اگر قبل از این عمل در صدد تعیین حد آن برآئیم موافق مطلب فوق کسر مفروض بصورت مبهم $\frac{0}{0}$ درآمده و دارای

هیچ معنائی نخواهد بود

مشتق هر تابع $y = f(x)$ را به y' و یا به $f'(x)$ و یا بصورت $\frac{dy}{dx}$ نمایند پس

$$\frac{dy}{dx} = y' = f'(x) = \lim\left[\frac{\Delta y}{\Delta x}\right]_{\Delta x \to 0}$$

($\lim\left[\frac{\Delta y}{\Delta x}\right]_{\Delta x \to 0}$ را تلفظ کنید حد $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ وقتیکه x میل کند بسمت صفر)

مثال ۱ – مشتق تابع ذیل را حساب کنید $\quad y = 2x + 3 \quad (1)$

ابتدا نموی مانند $\Delta x = h$ بمتغیر داده و نمو نظیر تابع را حساب مینمائیم و بجهة اینکه می‌بینیم که اگر $\Delta x = h$ نمو متغیر x باشد مقدار آخری متغیر چنین خواهد بود $x + h$ و مقدار آخری تابع y حاصل میشود بدینطریق که در رابطه (۱) بجای x مقدار آخریش $x + h$ را قرار دهیم پس $2(x+h)+3$ نمایش مقدار اخری تابع خواهد بود و بنابراین نمو تابع مساویست با

$$\Delta y = \overbrace{2(x+h)+3}^{\text{مقدار اخری}} - \overbrace{(2x+3)}^{\text{مقدار اولی}} = 2h$$

و حال نمو تابع را به نمو متغیر تقسیم میکنیم $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2h}{h}$ که پس از اختصار بدین صورت نوشته میشود $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$ چون خارج قسمت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ مساویست با ۲ پس حدش هم وقتیکه Δx میل کند بسمت صفر مساویست با ۲

بنابراین $y' = 2$

مثال ۲ — مطلوبست مشتق تابع $y = 2x^2 + 5x - 3 \quad (1)$

ابتدا به متغیر x نموّی مانند $h = \Delta x$ میدهیم بنابراین مقدار آخری x چنین خواهد بود $(x + h)$ و مقدار آخری y حاصل میشود بدینطریق که در رابطهٔ (۱) بجای x مقدار آخرش $x+h$ را قرار دهیم پس $2(x+h)^2 + 5(x+h) - 3$ نمایش مقدار آخری تابع میباشد و بنابراین نموّ تابع که مساویست با فضل مقدار آخری آن بر مقدار اوّلی مساویست با

$$\Delta y = 2(x+h)^2 + 5(x+h) - 3 - (2x^2 + 5x - 3) = 2x^2 + 4xh + 2h^2 + 5x + 5h - 3 - 2x^2 - 5x + 3$$

و یا $\Delta y = 4xh + 2h^2 + 5h$

خارج قسمت نموّ تابع بر نموّ متغیر مساویست با

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4xh + 2h^2 + 5h}{h} = \frac{h(4x + 2h + 5)}{h}$$

و یا پس از اختصار $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4x + 2h + 5$

حد $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ وقتیکه Δx و یا h میل کند بسمت صفر مساویست با $4x + 5$ زیرا که چون h میل کند بسمت صفر جمله $2h$ هم بسمت صفر میل نموده و بقدری کوچک میشود که میتوان از آن صرف نظر نمود پس $y' = 4x + 5$

مثال ۳ — مشتق تابع $y = \frac{2x-3}{x+5}$ را حساب کنید

ابتدا نموّ $h = \Delta x$ را بمتغیر میدهیم پس مقدار آخری x چنین خواهد بود $x + h$.

و مقدار آخری y مساویست با $\frac{2(x+h)-3}{x+h+5} = \frac{2x+2h-3}{x+h+5}$

بنابراین نموّ تابع مساوی است با

$$\Delta y = \frac{2x+2h-3}{x+h+5} - \frac{2x-3}{x+5} = \frac{(2x+2h-3)(x+5) - (x+h+5)(2x-3)}{(x+h+5)(x+5)}$$

و یا پس از اختصارات لازمه $\Delta y = \frac{13h}{(x+h+5)(x+5)}$

حال نموّ تابع را به نموّ متغیر تقسیم مینمائیم $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{13h}{(x+h+5)(x+5)h}$

حال اگر h را مساوی صفر اختیار نمائیم حاصل میشود $y' = \frac{13}{(x+5)^2}$

۴۶ — مشتق مقادیر ثابته — مشتق هر مقدار ثابتی مساوی صفر است

هرگاه تابع y ثابت باشد یعنی همیشه دارای یک مقدار معیّنی باشد واضح است که در این صورت مقادیر اوّلی و آخری آن مساوی میباشند و بنابراین نموّش مساوی صفر است $\Delta y = 0$ پس خارج قسمت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ بازاء جمیع مقادیر Δx همیشه مساوی صفر است بنابراین حدّش هم وقتیکه $\Delta x = 0$ باشد مساوی است با صفر پس $y' = 0$

۴۷ — مشتق تابع خطی — مشتق تابع $y = ax + b$ مساوی است با $y' = a$

بجهة تعیین مشتق تابع $y=ax+b$ ابتدا بمتغیر x نموی باسم Δx میدهیم و میگوئیم که اگر h نمو متغیر باشد مقدار آخری چنین خواهد بود $(x+h)$ و مقدار آخری تابع هم حاصل میشود بدینطریق که در رابطه (۱) بجای x مقدار آخرش $(x+h)$ را قرار دهیم پس مقدار آخری y مساوی است با $a(x+h)+b$ و نمو تابع که مساوی است با فضل مقدار آخری آن بر مقدار اولی مساوی خواهد بود با

$$\Delta y = a(x+h)+b-ax-b \quad \text{یا} \quad \Delta y = ah$$

و بنابراین

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{ah}{h} = a$$

خارج قسمت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ چون همیشه مساویست با a پس حدش هم وقتیکه Δx میل کند بسمت صفر مساوی a خواهد بود پس $y'=a$

مثال ـ مشتقات توابع $y=x$ و $y=2x+5$ و $y=1-3x$ و $y=\frac{1}{2}x-1$ بر وفق قاعده فوق بترتیب عبارتند از

$$y'=1 \text{ و } y=2 \text{ و } y'=3 \text{ و } y'=\frac{1}{2}$$

۴۸ ـ مشتق سه جمله درجه دوم ـ مشتق سه جمله درجه دوم $y=ax^2+bx+c$ مساویست با $y'=2ax+b$

بجهة تعیین مشتق تابع $y=ax^2+bx+c$ (۱) ابتدا بمتغیر x نموی باسم $\Delta x=h$ میدهیم و میگوئیم که اگر h نمو متغیر باشد مقدار آخری آن مساویست با $x+h$ و مقدار آخری تابع حاصل میشود بدین طریق که در رابطه (۱) بجای x مقدار آخرش $(x+h)$ را قرار دهیم پس مقدار آخری تابع مساوی است با $a(x+h)^2+b(x+h)+c$ و نمو Δy تابع مساویست با

$$\Delta y = a(x+h)^2+b(x+h)+c-(ax^2+bx+c)$$

یا

$$\Delta y = ax^2+2axh+ah^2+bx+bh+c-ax^2-bx-c$$

یا

$$\Delta y = 2axh+ah^2+bh$$

و بنابراین

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2axh+ah^2+bh}{h} = 2ax+ah+b$$

حال میتوان بسهولت دید که حد خارج قسمت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ وقتیکه Δx میل کند بسمت صفر مساویست با $2ax+b$ زیرا که جمله ah بی اندازه کوچک شده و میتوان از آن صرف نظر نمود پس $y'=2ax+b$

مثال ـ قاعده فوق را در توابع ذیل مجری داشته مشتق آنها را تعیین نمائید

$y=x^2+1$	$y'=2x$
$y=3x \quad x$	$y'=6x-5$
$y=\frac{1}{3}x^2 \frac{}{3} \quad +3$	$y'=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$
$y=\frac{1}{2}x^2+3x-$	$y'=x+3$

۴۹ - مشتق تابع هموگرافیک[۱۷] $y = \frac{ax+b}{a'x+b'}$ - مشتق تابع

$y = \frac{ax+b}{a'x+b'}$ مساویست با $y' = \frac{ab'-ba'}{(a'x+b')^2}$

چون بمتغیر x نموّ Δx مساوی h را بدهیم بر وفق مطالب فوق مقدار آخری تابع چنین خواهد شد $\frac{a(x+h)+b}{a'(x+h)+b'}$

بنابرین نموّ تابع مساویست با

$$\Delta y = \frac{a(x+h)+b}{a'(x+h)+b'} - \frac{ax+b}{a'x+b'}$$

و چون طرف ثانی را بیک مخرج تحویل نموده اختصارات لازمه را مجری بداریم حاصل میشود

$$\Delta y = \frac{ab'h - a'bh}{(a'x+a'h+b')(a'x+b')}$$

و بنابرین

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{ab'-ba'}{(a'x+a'h+b')(a'x+b')}$$

حال اگر نموّ Δx یا h متغیر میل کند بسمت صفر حال اول مخرج طرف ثانی مساوی $a'x+b'$ حال دوم میگردد و بنابرین حد $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ مساویست با $\frac{ab'-ba'}{(a'x+b')^2}$

پس $y' = \frac{ab'-ba'}{(a'x+b')^2}$

مثال - مشتقات توابع ذیل را از روی قاعده فوق حساب کنید

$y = \frac{1}{x}$ — $y' = \frac{-1}{x^2}$

$y = \frac{1}{x-2}$ — $y' = \frac{-1}{(x-2)^2}$

$y = \frac{2x+1}{x}$ — $y' = \frac{-1}{x^2}$

$y = \frac{4x-3}{x+1}$ — $y' = \frac{7}{(x+1)^2}$

۵۰ - قضیه - مشتق هر تابع صعودی $y = f(x)$ همیشه مثبت است

قبلاً بخاطر میآوریم که تابع $y = f(x)$ را صعودی گویند وقتیکه جهت تغییراتش موافق با جهت تغییرات x باشد یعنی اگر متغیر x ترقی یا تنزل کند تابع y هم ترقی یا تنزل نماید

حال فرض مینمائیم که بازاء نموّ Δx متغیر نظیر آن نموّ تابع مساوی Δy باشد اگر متغیر از مقدار اولی x ترقی نموده و برسد بمقدار آخری $(x+\Delta x)$ یعنی که نموّ Δx مثبت باشد برحسب تعریف فوق باید تابع هم از مقدار اولی y ترقی کرده و برسد بمقدار آخری $y+\Delta y$ یعنی که Δy هم مثبت باشد و اگر متغیر از مقدار اولی تنزل نموده برسد بمقدار آخری $x+\Delta x$ یعنی نموّ Δx منفی باشد برحسب تعریف فوق لازم است که تابع هم از مقدار اولی y تنزل نموده برسد بمقدار آخری $y+\Delta y$ یعنی Δy هم منفی باشد پس وقتیکه تابعی صعودی باشد همیشه Δx و Δy متحد العلامه میباشند بنابرین خارج قسمت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ همیشه مثبت است پس حدش y' هم وقتیکه Δx میل کند بسمت صفر همیشه مثبت میباشد

چنانکه در (نمره ۴۶ جلد دوم) دیده ایم تابع $y = 4x - 3$ بعلت مثلث

بودن a بازاء جمیع مقادیر متغیر x صعودی است و حال می‌بینیم که مشتق آن
$y' = 4$ مقداری است مثبت

۵۱ – قضیه – مشتق هر تابع نزولی $y = f(x)$ همیشه منفی است

قبلاً بخاطر میآوریم که تابع را نزولی گویند وقتیکه جهة تغییراتش مخالف جهت تغییرات متغیر باشد یعنی اگر متغیر x ترقی یا تنزل نماید تابع y تنزل یا ترقی کند حال فرض مینمائیم که بازاء Δx نمو متغیر نمو نظیر تابع مساوی Δy باشد اگر متغیر از مقدار اولی x ترقی کرده برسد بمقدار آخری $x+\Delta x$ یعنی نمو Δx مثبت باشد لازم است که بر وفق تعریف فوق تابع از مقدار اولی y تنزل نموده برسد بمقدار آخری $y+\Delta y$ یعنی Δy مقداری باشد منفی و اگر متغیر از مقدار اولی x تنزل نموده برسد بمقدار آخری $(x+\Delta x)$ نمو Δx منفی است و بر حسب تعریف فوق میبایستی که تابع از مقدار اولی y ترقی کرده برسد بمقدار آخری $(y+\Delta y)$ یعنی Δy مثبت باشد پس می‌بینیم که اگر تابعی نزولی باشد Δy و Δx همیشه مختلف العلامه میباشند و بنابراین خارج قسمت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ همیشه منفی است پس حدش y' هم وقتیکه Δx میل کند بسمت صفر منفی است فهو المطلوب

سابقاً در (نمره ۲۶ جلد دوم) دیده ایم که تابع $y = 7 - 4x$ بعلت

منفی بودن a بازاء جمیع مقادیر x نزولی است و حال می‌بینیم که مشتقش $y' = -4$ هم مقداری است منفی

فصل دوم

مورد استعمال مشتق در تعیین جهة تغییرات توابع

۵۲ – از قضایای (نمره ۵۰ و ۵۱) میتوان بسهولت استنباط کرد که برای تعیین جهة تغییرات تابعی کافی است که علامت مشتق آنرا معین نمود و بطور کلی برای تعیین جهة تغییرات توابع طریق ذیل را اتخاذ مینمایند

اولاً اگر تابع مفروض دارای مخرج باشد بایستی مقدار (یا مقادیر) متغیر را که بازاء آن مخرج تابع صفر است معین نمود واضح است که بازاء چنین مقداری (یا مقادیری) از متغیر مقدار نظیر تابع الی غیر النهایه است و میگویند که تابع بازاء این مقدار (یا مقادیر) انفصالی میباشد

ثانیاً مشتق تابع مفروض را حساب مینمایند

ثالثاً – تعیین میکنند مقادیری از متغیر را که بازاء آنها مشتق صفر است

رابعاً – مقادیری را که بازائشان تابع الی غیر النهایه است و همچنین مقادیری را که

بازاء آنها مشتق صفر است بترتیب صعودی پهلوی یکدیگر نوشته تا جدولی بدین طریق تشکیل گردد خاصه بعد از انجام مطلب ۲ ابعاد فواصلی مرتب میشوند که در هر یک از آنها اولاً تابع الی غیر النهایه نبوده و ثانیاً علامت مشتق تغییر نمیکند و برای تعیین جهة تغییرات تابع کافیست که علامت مشتقش را در هر یک از فواصل مذکور معین نمود

در فواصلی که علامت مشتق بعلاوه است تابع صعودی و در فواصلی که علامت مشتق منهاست تابع نزولی میباشد و بعلاوه از روی جدول معلوم میشود در جاهائیکه مشتق صفر است تابع ماکزیمم یا می‌نیمم یا ثابت است. (باید دانست که مطلب اخیر عمومیت ندارد یعنی ممکنست در جائی مشتق صفر بوده بدون آنکه تابع ماکزیمم یا می‌نیمم باشد)

مثال ۱ - مطلوبست جهة تغییرات تابع خطی $y = ax + b$ ابتدا مشتق تابع مفروض را حساب مینمائیم و آن مساویست با $y' = a$ و حال اگر $y' = a > 0$ باشد تابع دائما صعودیست و اگر $y' = a < 0$ باشد تابع دائما نزولی است

مثال ۲ - مطلوبست جهة تغییرات سه جمله درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$

چون بر وفق آنچه که در فوق ذکر شد عمل کنیم بنا چنین خواهیم داشت $y' = 2ax + b$ مقدار y' صفر میشود وقتیکه $x = -\frac{b}{2a}$ باشد اولاً اگر $a > 0$ باشد نامساوی $y' = 2ax + b > 0$ محقق است هرگاه $x > -\frac{b}{2a}$ پس اگر $x < -\frac{b}{2a}$ مشتق تابع یعنی y' منفی است و بنا بر این تابع y نزولی میباشد و اگر $x > -\frac{b}{2a}$ مقدار $y' > 0$ پس y هم صعودی است

$$a > 0 \left\{ \begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & \nearrow & -\frac{b}{2a} & \nearrow & +\infty \\ \hline y' & & - & 0 & + & \\ \hline y & +\infty & \searrow & \frac{4ac-b^2}{4a} & \nearrow & +\infty \end{array} \right.$$

و بازاء $x = -\frac{b}{2a}$ تابع می‌نیمم است

ثانیاً اگر $a < 0$ باشد نامساوی $y' = ax + b > 0$ محقق است هرگاه $x < -\frac{b}{2a}$ باشد پس اگر $x < -\frac{b}{2a}$ مشتق y' مثبت و بنا بر این تابع y صعودی است و اگر $x > -\frac{b}{2a}$ مشتق y' منفی و بنا بر این تابع y نزولی است و بازاء $x = -\frac{b}{2a}$ تابع ماکزیمم است

مثال ۳ - مطلوبست جهة تغییرات تابع هموگرافیک

$$y = \frac{ax + b}{a'x + b'}$$

مقدار تابع مفروض الی غیر النهایه است وقتیکه $x = -\frac{b'}{a'}$ باشد مشتق این تابع بر وفق (نمره ۴۹) عبارتست از $y' = \frac{ab' - ba'}{(a'x + b')^2}$ چنانکه می‌بینیم علامت y' بسته است بعلامت صورتش $ab' - ba'$ زیرا که مخرج $(a'x + b')^2$ بازاء جمیع مقادیر x مثبت است پس برحسب اینکه $(ab' - ba')$ مثبت یا منفی باشد y' هم یا مثبت یا منفی است و بنا بر این تابع صعودیست هرگاه $(ab' - ba')$ مثبت باشد و نزولی است وقتیکه $ab' - ba' < 0$

و حال تخمین بنمائیم که مقدار تابع y بازاء $x = \pm\infty$ مساوی چیست و بجهة این عمل تابع را چنین مینویسیم

$$y = \frac{a + \frac{b}{x}}{a' + \frac{b'}{x}}$$

در اینصورت بدیهی است که اگر مقدار x الی غیر النهایه بزرگ باشد مقدار کسور $\frac{b}{x}$ و $\frac{b'}{x}$ الی غیر النهایه کوچک است بطوریکه حد y وقتیکه x میل کند بسمت $\pm\infty$ مساوی با $\frac{a+0}{a'+0} = \frac{a}{a'}$ است جدول ذیل خلاصه نمایش تغییرات $y = \frac{ax+b}{a'x+b'}$ است

		x	$-\infty$	↗	$-\frac{b'}{a'}$	↗	$+\infty$
اولا	$ab' - ba' > 0$	y'		+		+	
		y	$\frac{a}{a'}$	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	$\frac{a}{a'}$
ثانیا	$ab' - ba' < 0$	y'		−		−	
		y	$\frac{a}{a'}$	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	$\frac{a}{a'}$

تبصره - وقتیکه $ab' - ba' = 0$ باشد مشتق y بازاء جمیع مقادیر متغیر مساوی صفر است زیرا که از رابطه فوق حاصل میشود $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ و چون مقدار مشترک $\frac{a}{a'}$ و $\frac{b}{b'}$ را مساوی k فرض نمائیم چنین خواهیم داشت $a = ka'$ و $b = kb'$ و چون مقادیر a و b را در رابطه $y = \frac{ax+b}{a'x+b'}$ ببریم حاصل میشود $y = \frac{ka'x+kb'}{a'x+b'} = \frac{k(a'x+b')}{a'x+b'} = k$

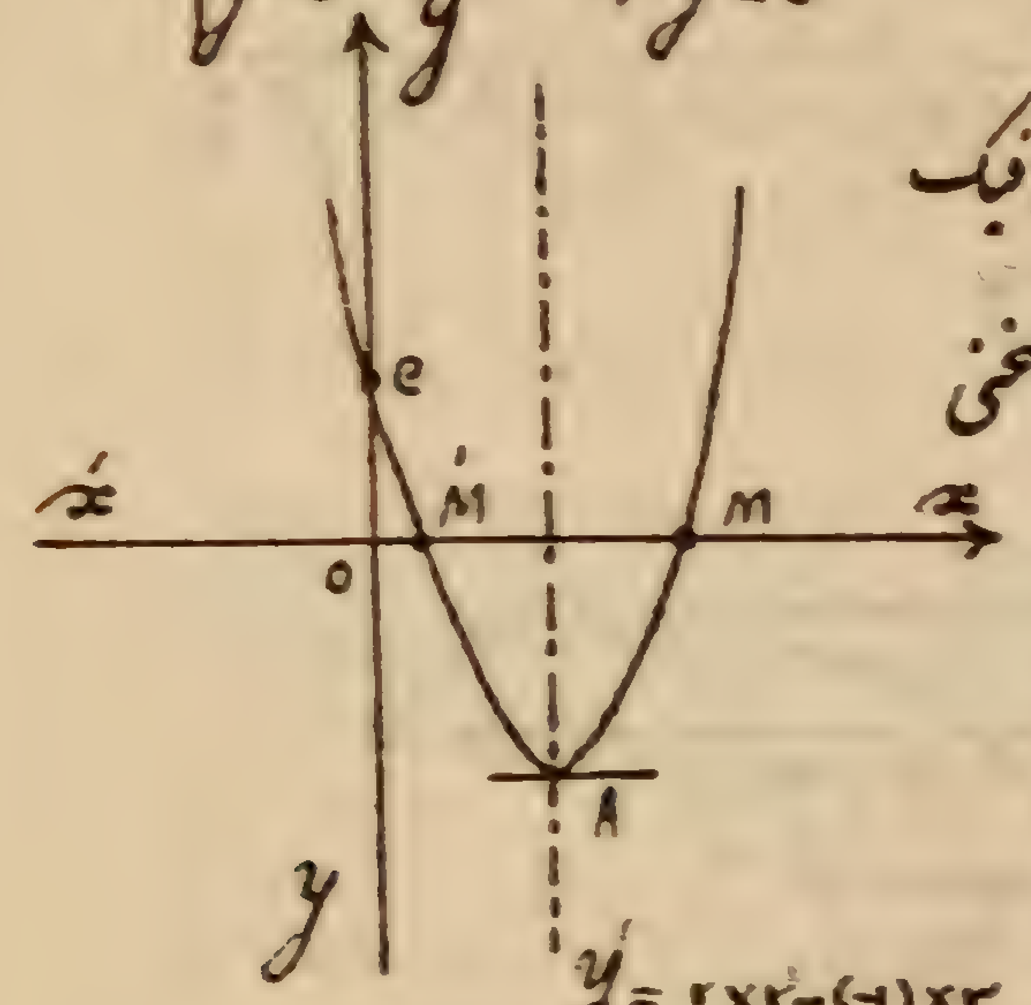
و چون k مقداری است ثابت پس مشتقش معادل صفر است

مثال عددی - مطلوبست تعیین تغییرات جمله $y = 2x^2 - 7x + 3$ ابتدا مشتقش را معین مینمائیم و آن عبارتست از $y' = 4x - 7$ ثانیا تعیین مینمائیم بازاء چه مقداری از متغیر مشتق y' معادل صفر است مقدار مطلوب در اینجا مساویست با $x = \frac{7}{4}$ حال جدول ذیل را تشکیل میدهیم

x	$-\infty$	↗	$\frac{7}{4}$	↗	$+\infty$
y'		−	0	+	
y	$-\infty$	↘	$\frac{-25}{8}$	↗	$+\infty$

از علامت y' میتوان بیکنظر جهة تغییرات y را معین نمود و می‌بینیم که بازاء $x = \frac{7}{4}$ تابع y می‌نیمم است منحنی نمایش تغییرات y را هم میتوان از روی جدول فوق رسم نمود بدینطریق که ابتدا سطحی دو محور $x'x$ و $y'y$ را رسم نموده و بعد نقاط اصلیه A و e و M و M' را تعیین مینمائیم (نقاط M' و M عبارتند از محل تقاطع منحنی مطلوب با محور $x'x$ و e محل تقاطع منحنی است با محور $y'y$) و بجهة تحصیل چون رجوع به (نمره ۲ و جلد دوم) الجبر کنیم می‌بینیم که مختصات نقاط مفروضه عبارتند از

$A \left| \begin{array}{l} x = \frac{-b}{2a} = \frac{7}{4} \\ y = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{-25}{8} \end{array}\right.$ $\quad e \left| \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 3 \end{array}\right.$ $\quad M \left| \begin{array}{l} x = x'' = 3 \\ y = 0 \end{array}\right.$ $\quad M' \left| \begin{array}{l} x = x' = \frac{1}{2} \\ y = 0 \end{array}\right.$



مثال عددی - تغییرات تابع هموگرافیک $y = \frac{2x-1}{3x+2}$ را معین نموده و بعد منحنی نمایش تغییرات آنرا رسم نمائید

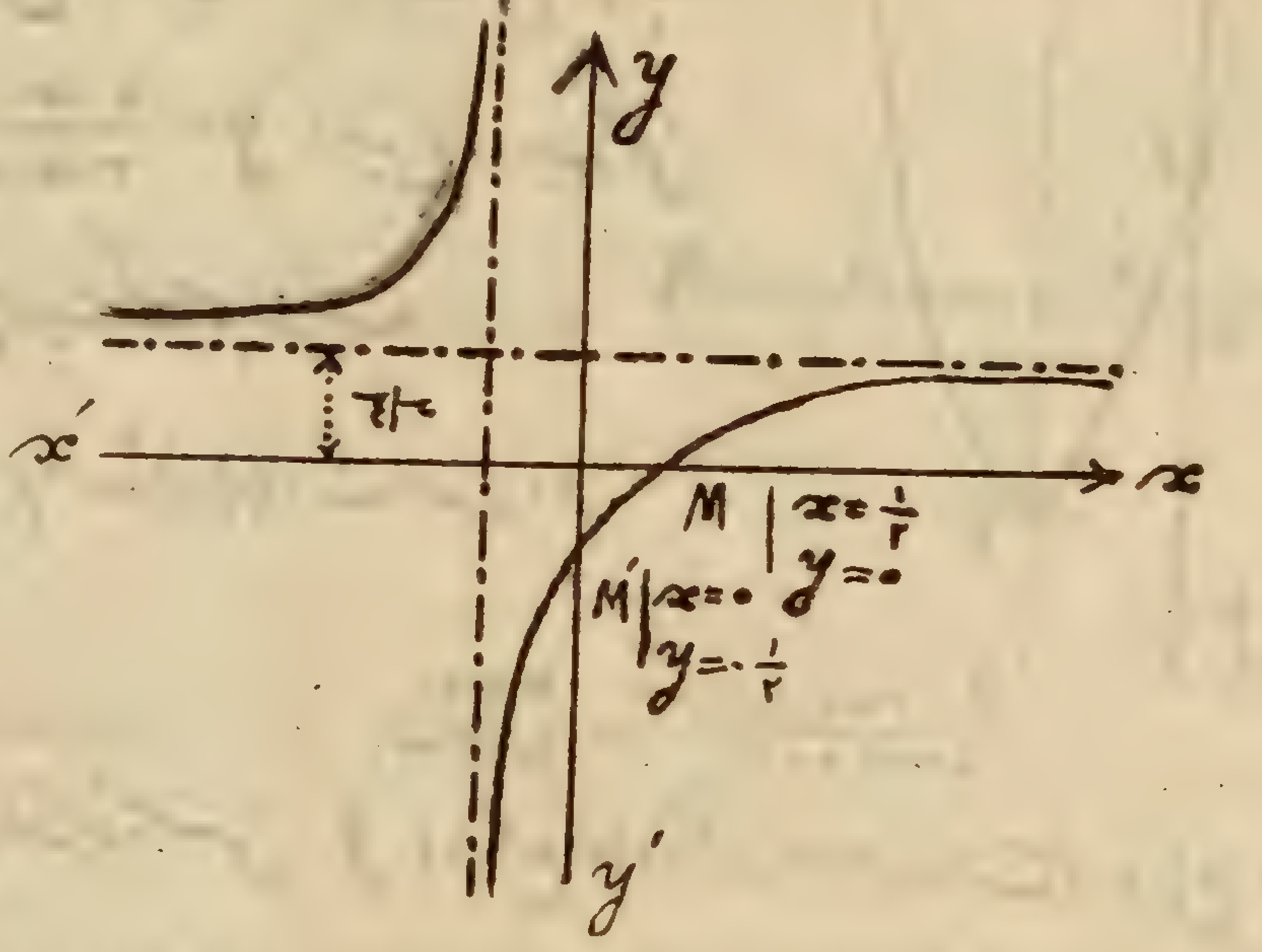
مشتق تابع مفروض عبارت است از

$$y' = \frac{2\times 2-(-1)\times 3}{(3x+2)^2} = \frac{4+3}{(3x+2)^2} = \frac{7}{(3x+2)^2}$$

چنانکه ملاحظه میشود مشتق y' بازاء جمیع مقادیر متغیر x مثبت است بنابراین تابع y دائما صعودیست مقدارش بازاء $x = \pm\infty$ مساویست با $\frac{2}{3}$ زیرا که چون تابع را بصورت $y = \frac{2-\frac{1}{x}}{3+\frac{2}{x}}$

بنویسیم و در آن x را مساوی $\pm\infty$ فرض کنیم بسهولت می‌بینیم که کسور $\frac{1}{x}$ ، $\frac{2}{x}$ بی اندازه نزدیک بصفر میشوند بطوریکه y را بازاء $x = \pm\infty$ میتوان بدون خطای محسوس مساوی $\frac{2}{3}$ اختیار نمود و بازاء $x = \frac{1}{2}$ مقدار تابع مساویست بصفر و بازاء $-\frac{2}{3}$ تابع بصورت $y = \frac{-\frac{2}{3}\times 3 - 1}{-\frac{2}{3}\times 3 + 2} = \frac{-5}{0}$ در آمده دارای هیچ معنائی نیست ولی ملاحظه میشود که اگر ε نمایش عدد مثبت بی اندازه کوچکی باشد بازاء $x = -\frac{2}{3} - \varepsilon$ مقدار y مساویست با $+\infty$ و بازاء $x = -\frac{2}{3} + \varepsilon$ مقدار y مساویست با $+\infty$ جدول ذیل خلاصهٔ مطالب فوق بوده و میتوان از روی آن منحنی نمایش تغییرات y را بسهولت رسم نمود

x	$-\infty$	↗	$-\frac{2}{3}-\varepsilon$	↗	$-\frac{2}{3}$	↗	$-\frac{2}{3}+\varepsilon$	↗	0	↗	$\frac{1}{2}$	↗	$+\infty$
y'		+		+		+		+		+		+	
y	$\frac{2}{3}$	↗	$+\infty$		?		$-\infty$	↗	$-\frac{1}{2}$	↗	0	↗	$\frac{2}{3}$



ضمیمه در باب
ترتیب و تبدیل و ترکیب اشیاء نسبت بیکدیگر

اولاً - ترتیب - هرگاه از m شیئی مثلاً از m حرف جرگه‌هائی تشکیل دهیم که هر کدام شامل n حرف بوده و اختلاف هر جرگه از جرگهٔ دیگر خواه بواسطهٔ تغییر حروف خواه بواسطهٔ تقدم و تأخر حروف آنها باشد میگویند که از m حرف ترتیبی بعمل آمده است n به n

مثلاً ترتیب چهار حرف a و b و c و d دو بدو حاصل میشود بدین طریق که در طرف راست هر یک از این حروف سه حرف دیگر را بنویسیم

ab , ac , ad
ba , bc , bd
ca , cb , cd
da , db , dc

و چنانکه می‌بینیم اختلاف دو جرگه مانند (ad , bc) یا $(db$ و $bd)$ یا بواسطهٔ تغییر حروف یا بواسطهٔ تقدم و تأخر حروف آنهاست

و همچنین اگر خواسته باشیم ترتیب چهار حرف a و b و c و d را سه بسه معین کنیم باید سمت راست هر یک از ترتیبهای دو بدو حروف دیگر را بنویسیم

abc, abd, acb, acd, adb, adc
bac, bad, bca, bcd, bda, bdc
cab, cad, cba, cbd, cda, cdb
dab, dac, dba, dbc, dca, dcb

مسئله - مطلوبست تعیین عدهٔ ترتیبهای m حرف n به n

بجهة تعیین عدهٔ ترتیبهای m حرف n به n میگوئیم اگر ترتیبهای m حرف i به i معلوم باشد و بخواهیم ترتیبهای همان m حرف را $(i+1)$ به $(i+1)$ معین کنیم باید بتدریج با هر یک از ترتیبهای i به i بقیهٔ حروف یعنی $(m-i)$ حرف دیگر را که در آن ترتیب موجود نیست اضافه گردد بدیهی است که با هر یک از ترتیبهای سابق $(m-i)$ ترتیب جدید تشکیل میگردد بطوریکه اگر عدهٔ ترتیبهای سابق را به A_m^i بنمائیم (A_m^i را تلفظ کنید ترتیب m حرف i به i) عدهٔ ترتیبهای جدید را میتوان چنین نمود $A_m^i \times (m-i)$ و میگوئیم

اولاً جمیع این ترتیبهای جدید خواه بواسطهٔ ترتیبی که مرکب از i حرف بوده در تشکیل ترتیبهای جدید بکار رفته‌اند و خواه بواسطهٔ آخرین حرفیکه بر هر ترتیب مرکب از i حرف اضافه شده نسبت بیکدیگر متمایز میباشند

ثانیاً جمیع ترتیبهای m حرف $(i+1)$ به $(i+1)$ مابین ترتیبهای جدید فوق موجود میباشد زیرا اگر حرف آخر یکی از ترتیبهای جدید را حذف کنیم یکی از ترتیبهای قدیم مرکب از i حرف بدست میآید و چون در تشکیل ترتیبهای جدید جمیع ترتیبهای مرکب از i حرف بکار رفته‌اند پس حتماً جمیع ترتیبهای m حرف $(i+1)$ به $(i+1)$ مابین ترتیبهای جدید موجود میباشند و بنابراین

$$A_m^{i+1} = A_m^i (m-i)$$

و چون در دستور فوق i را بترتیب مساوی ۱ و ۲ و ۳ و ... و $(n-1)$ اختیار کنیم تساویهای ذیل را خواهیم داشت

$$A_m^2 = A_m^1 (m-1)$$

$$A_m^3 = A_m^2 (m-2)$$

....

$$A_m^n = A_m^{n-1} (m-n+1)$$

حال اگر تساویهای فوق را در یکدیگر ضرب کرده و حاصل را مختصر کنیم چنین خواهیم داشت

$$A_m^n = A_m^1 (m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)$$

و چون عدهٔ ترتیبهای m حرف یک بیک مساوی m میباشد یعنی $A_m^1 = m$ پس تساوی فوق را میتوان چنین نوشت

$$A_m^n = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)$$

دستور فوق عدهٔ ترتیبهای m شیئی را n به n بدست میدهد و چنانکه می‌بینیم مرکبست از n عامل که اولی آنها m است و چون از m یک واحد کم کنیم عامل دوم بدست میآید و اگر از عامل دوم یک واحد نقصان کنیم عامل سوم بدست میآید بطوریکه عامل n ام مساوی $(m-n+1)$ میباشد مثلاً عدهٔ ترتیبهای پنج حرف سه به سه مساوی است با

$$A_5^3 = 5(5-1)\cdot(5-2) = 60$$

ثانیاً تبدیل - چون در دستور ترتیبهای n شیئی n به n مقدار n را مساوی

m اختیار کنیم ترتیبهای m شئی m به m بدست میاید و واضح است که در این صورت ترتیبهای مختلف شامل هر m شئی بوده و فقط اختلاف هر جرگه از جرگهٔ دیگر بواسطهٔ ترتیب تقدم و تأخر اشیاء میباشد و این قبیل ترتیبها را تبدیل میگویند پس تبدیل m شئی عبارتست از ترتیب همین m شئی m به m و چون عدهٔ تبدیلهای m حرف را به P_m بنمائیم چنین خواهیم داشت

$$P_m = A_m^m = m(m-1)(m-2)\cdots\cdots\times 2\times 1$$

و یا

$$P_m = 1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots(m-2)(m-1)m$$

و در ریاضیات عالیه حاصلضرب $1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots(m-2)(m-1)m$ را به $m!$ مینمایند و $m!$ را بلفظ فاکتریل m (Factorielle m) تلفظ میکنند پس دستور فوق را میتوان بصورت مختصر ذیل نوشت $P_m = m!$

مثلاً عدهٔ تبدیلهای ده شئی مساوی است با

$$P_{10} = 10! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10 = 3628800$$

ثالث - ترکیب - ترکیب m حرف n به n عبارت از تشکیل جرگه‌هائیست که هرکدام شامل n حرف بوده و اختلافشان از یکدیگر فقط بواسطهٔ نوع حروف آنها باشد نه بواسطهٔ تقدم و تأخر حروف

مثلاً برای ترکیب پنج حرف a و b و c و d و e سه به سه ابتدا آنها را دو به دو ترکیب میکنیم بدین طریق که بتالی هر یک از آنها حروفی که در الفبا بعد از آن حرف واقع اند مینویسیم

$$\left\{\begin{array}{llll} ab & ac & ad & ae \\ bc & bd & be & \\ cd & ce & & \\ de & & & \end{array}\right.$$

و بعد بتالی حرف آخر هر یک از این ترکیبها سایر حروفی که در الفبا بعد از آن حرف آخر واقعند قرار میدهیم تا آنکه ترکیبهای پنج حرف سه به سه بدست آید

$$\left\{\begin{array}{l} abc,\ abd,\ abe,\ acd,\ ace,\ ade \\ bcd,\ bce,\ bde \\ cde \end{array}\right.$$

و چون بطریق فوق عمل کنیم میتوان ترکیبهای m شئی را n به n بدست آورد

مسئله - مطلوب است عدهٔ ترکیبهای m شئی n به n

بجهة تعیین دستوری که از روی آن بتوان عدهٔ ترکیبهای m شئی را n به n معین نمود ابتدا فرض میکنیم که مسئله حل شده و عدهٔ ترکیبهای m شئی n به n بدست آمده باشد بر وفق تعریف ترکیب m شئی n به n عبارت از تشکیل ترتیبهای m شئی است n به n بطوریکه ترتیبهای مختلف اختلافشان از یکدیگر اقلاً بواسطهٔ یک شئی باشد و چون با هر یک از این ترکیبهای m شئی n به n تبدیل تشکیل دهیم مجموع این تبدیلها با ترکیبهای فوق ترتیبهای m شئی را n به n تشکیل میدهند و اگر عدهٔ ترکیبهای m شئی را n به n به C_m^n بنمائیم بر وفق مطلب فوق رابطهٔ ذیل را خواهیم داشت

وازآنجا

$$A_m^n = C_m^n \times P_n$$

یا

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{B_n}$$

و یا

$$C_m^n = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n}$$

گاهی هم محض سهولت عمل صورت و مخرج کسر فوق را در حاصل ضرب $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m-n)$ ضرب کرده و آنرا چنین مینویسند

$$C_m^n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m-2)(m-1)m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m-n)}$$

یا

$$C_m^n = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$$

مثلاً عده ترکیبهای ده حرف پنج به پنج مساوی است با

$$C_{10}^5 = \frac{3628800}{120 \times 120} = 252$$

کتبه جواد شریفی (ملک الخطاطین)

(۱۳۱۴)

در مطبعه (علمی) بطبع رسید

(۱۳۵۴)

اخطار

جلد پنجم از اصول علم جبر و مقابله مقدماتی

مخصوص سال ششم مدارس متوسطه

تحت طبع است

طالبین جلد اول و دوم و سوم و چهارم

بکتابخانه معرفت

رجوع فرمایند

اصول علم جبر و مقابله مقدماتی

جلد سوم

مخصوص سال چهارم مدارس متوسطه

تألیف

آقای محمد وحید تنکابنی

استاد و ممتحن ریاضیات عالیه دانش سرای عالی

چاپ سوم

حق طبع و تقلید محفوظ

طهران

۱۳۱۴

چاپخانه دقت